Módulo de Progressões Geométricas

Soma dos Termos da P.G. Infinita

1^a **série E.M.**

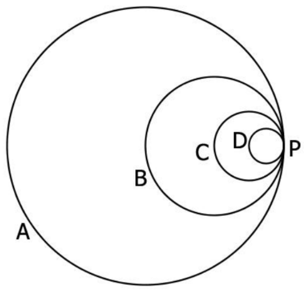
Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Progressões Geométrica
Soma dos Termos da P.G. Infinita

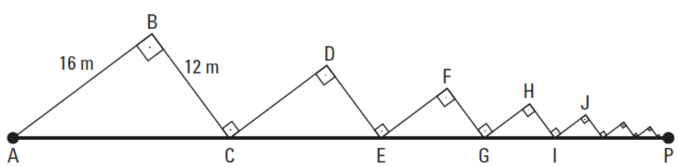
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere o padrão de construção representado pelo desenho abaixo, com as respectivas etapas escritas.



O disco A tem raio medindo 1. O disco B é tangente ao disco A no ponto P e é tangente ao centro do disco A. O disco C é tangente ao disco B no ponto P e é tangente ao centro do disco B. O disco D é tangente ao disco C no ponto P e é tangente ao centro do disco C. O processo de construção dos discos é repetido infinitamente.
Considerando a sucessão infinita de discos, qual a soma das áreas de todos os discos na sequência?

Exercício 2. A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $BC = CD$, $DE = EF$, $FG = GH$, $HI = IJ$ e assim por diante. Considerando infinita a quantidade desses segmentos, qual a distância horizontal AP alcançada por esse móvel?



Exercício 3. Um sábio da Antiguidade propôs dois problemas aos seus discípulos:

> Uma rã parte da borda de uma lagoa circular de 7,5 metros de raio e se movimenta saltando em linha reta até o centro. Em cada salto, avança a metade do que avançou no salto anterior.

a) No primeiro salto avança 4 metros. Em quantos saltos chega ao centro?

b) No primeiro salto da rã é de 3 metros, ela não chega ao centro. Justifique a afirmação.

Exercício 4. Em um pomar são colhidas semanalmente apenas as frutas que já estão maduras. Dessa maneira, o dono do pomar percebeu que na primeira semana fora colhido 1000 kg e que, a cada semana, havia uma queda de 5% na colheita em relação à semana anterior. Sendo assim, qual a quantidade máxima de frutas que pode ser colhida nesse pomar?

Exercício 5. Qual a soma dos infinitos termos da progressão geométrica $(3x, 2x, 4, \ldots)$, sendo $x > 0$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Júnior toma um comprimido de um remédio de 60 mg, diariamente, às 20 h. O organismo de Júnior elimina metade da medicação tomada a cada 24 horas. A medicação será tomada indefinidamente para o controle de diabetes. Qual a quantidade de medicamento que se acumulará no organismo de Júnior?

Exercício 7. Podemos determinar uma fração geratriz a partir de uma soma de frações que são termos de uma P.G. decrescente de razão $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$, sendo n o tamanho do período, como por exemplo

$$\begin{aligned} 0,333\ldots &= 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

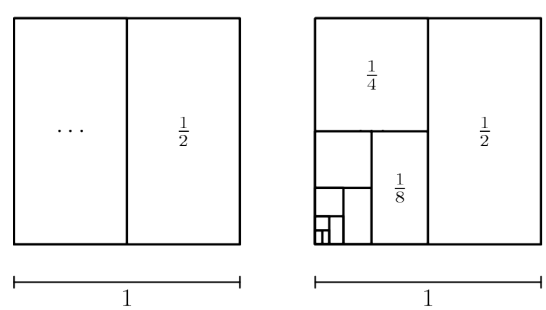
Determine as geratrizes das dízimas periódicas abaixo (aplicando o limite da soma dos termos da P.G.):

a) $0,777777\ldots$

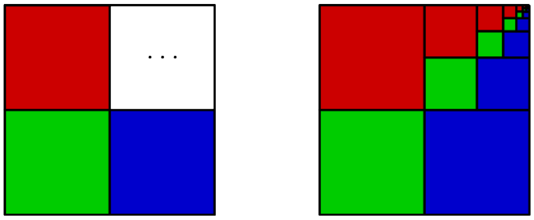
b) $0,2424242\ldots$

Exercício 8. Uma multinacional implantou um programa de combate ao fumo entre os funcionários. Dessa maneira, o setor de saúde da empresa percebeu que no final do primeiro mês de campanha 120 funcionários aderiram ao programa e deixaram de fumar e, a cada mês, havia uma queda de 10% em relação ao mês anterior do número de novos adeptos ao programa que resolviam abandonar o tabagismo. Qual a quantidade máxima de funcionários que poderão abandonar o hábito de fumar nessa multinacional?

Exercício 9. A soma $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots = 1$ pode ser ilustrada como a figura abaixo, representando a área do quadrado unitário.

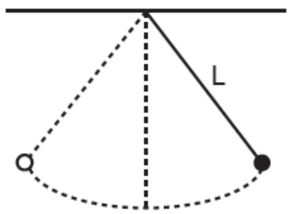


Sendo assim, escreva uma fórmula que represente a soma das áreas dos quadrados vermelhos da figura abaixo à direita, cujos lados construídos ligando perpendicularmente os ponto médio dos quadrados maiores.



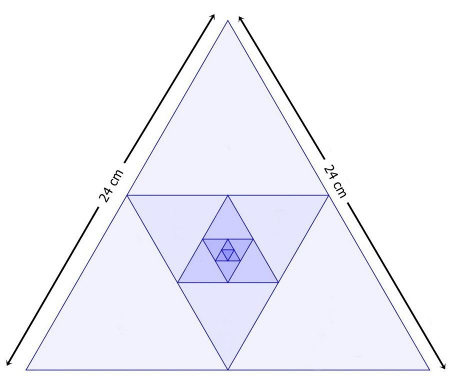
3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Um pêndulo simples de comprimento L é colocado em movimento e tem sua primeira oscilação formando um arco que mede 2000 centímetros, conforme a figura.



O comprimento do arco que correspondente à segunda oscilação será de $\frac{3}{4}$ do comprimento do arco que corresponde à primeira. O comprimento do arco da oscilação seguinte será de $\frac{3}{4}$ do comprimento do arco anterior, e assim por diante. Supondo que o movimento do pêndulo não seja interrompido, qual a soma dos comprimentos, em metros, de todos os arcos percorridos?

Exercício 11. Os lados de um triângulo equilátero medem 24 cm. Os pontos médios são conectados para construir outro triângulo equilátero cujos pontos médios dos lados são outra vez conectados para formar outro triângulo equilátero e esse processo continua indefinidamente.



Calcule a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros dessa sequência.

Exercício 12. Uma P.G. infinita tem soma 2005 e razão $\frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Uma nova sequência é obtida ao elevar ao quadrado todos os os termos da P.G. original e a nova soma dos termos fica 10 vezes a soma inicial. Calcule o valor de $m + n$?

Exercício 13. Sendo $-1 < q < 1$, e a soma

$$S(q) = 12 + 12r + 12r^2 + 12r^3 + \ldots,$$

ou seja, uma soma de P.G.. Para um certo $a \in]-1, 1[$, temos a equação $S(a)S(-a) = 2016$. Qual o valor de $S(a) + S(-a)$?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do vestibular da UFRGS $-$ 2015**)**
De início, perceba que que o raio do círculo A é o diâmetro do B, o raio de B é o diâmetro de C, o raio de C é o diâmetro de D e assim sucessivamente, isto é, a progressão dos raios é uma P.G. decrescente. Como a fórmula da área de um círculo é πR^2, a respectiva razão vale $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. Sendo assim, a soma das áreas dos círculos fica

$$\begin{aligned}\pi \cdot 1^2 + \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + +\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + +\pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \ldots &= \\ \pi\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) &= \\ \pi\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}} &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

2. (Adaptado do vestibular da ESPM)
Considerando os ângulos assinalados, podemos concluir que todos os triângulos são semelhantes. Além disso, pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$\begin{aligned}AB^2 + BC^2 &= AC^2\\ 16^2 + 12^2 &= AC^2\\ AC &= \sqrt{256+144}\\ AC &= \sqrt{400}\\ &= 20 \text{ m.}\end{aligned}$$

Podemos calcular CE pela semelhança de triângulos, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{CD}{AB} &= \frac{CE}{20}\\ \frac{12}{16} &= \frac{CE}{20}\\ CE &= 15,\end{aligned}$$

ou ainda percebendo que a constante de proporcionalidade é a razão da P.G. decrescente infinita ilustrada, com $a_1 = 20$, $q = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = CE$, $a_3 = EG$, $\ldots$. Assim, a distância AP é o somatório dos a_n's, que fica

$$\begin{aligned}AP &= \frac{a_1}{1-q}\\ AP &= \frac{20}{1-\frac{3}{4}}\\ AP &= 20 \cdot \frac{4}{1} = 80 \text{ m.}\end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da FGV $-$ 2014**)**

a) Temos que os quatro saltos resolverão a situação, ou seja,

$$4 + 2 + 1 + 0,5 = 7,5 \text{ m.}$$

b) Agora, começando por 3, o limite da soma da P.G. decrescente infinita de razão $\dfrac{1}{2}$ fica

$$\begin{aligned}3 + 1,5 + 0,75 + \ldots &= \\ \frac{3}{1-\frac{1}{2}} &= \\ 3 \cdot 2 &= 6,\end{aligned}$$

e portanto, não alcançará 7,5 metros.

4. (Adaptado do vestibular da ACAFE (SC) $-$ 2014)
Temos uma P.G. decrescente de razão 95% e soma

$$\begin{aligned}S_\infty &= \frac{1000}{1-0,95}\\ &= \frac{1000}{0,05}\\ &= 20000 \text{ kg} = 20 \text{ toneladas.}\end{aligned}$$

5. (Adaptado do vestibular da ESPM (RS))
Dada a P.G. $(3x, 2x, 4, \ldots)$, sendo $x > 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}(2x)^2 &= 3x \cdot 4\\ 4x^2 &= 12x\\ x &= 3.\end{aligned}$$

Assim, ficamos com $a_1 = 12$, $q = \dfrac{2}{3}$ e

$$\begin{aligned}S &= \frac{12}{1-\frac{2}{3}}\\ S &= \frac{12}{\frac{1}{3}}\\ S &= 12 \cdot 3\\ &= 36.\end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular da FPS (PE) $-$ 2015**)**
Trata-se de um problema de meia vida (P.G. decrescente de razão $\dfrac{1}{2}$), com $a_1 = 60$. Sendo assim, a quantidade de medicamento que ainda resta no corpo é o somatório das quantidades remanescentes dos dias anteriores, o que permite escrevermos

$$\begin{aligned}60 + 30 + 15 + \ldots &= \frac{60}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 60 \cdot 2\\ &= 120 \text{ mg.}\end{aligned}$$

7. Vamos adaptar o processo do enunciado aos itens abaixo.

a)

$$
\begin{aligned}
0,777\ldots &= 0,7+0,07+0,007+\ldots\\
&= \frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots\\
&= \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}\\
&= \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{7}{9}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
0,242424\ldots &= 0,24+0,0024+0,000024+\ldots\\
&= \frac{24}{100}+\frac{24}{10000}+\frac{24}{1000000}+\ldots\\
&= \frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}}\\
&= \frac{24}{100}\cdot\frac{100}{99}\\
&= \frac{24}{99}\\
&= \frac{8}{33}.
\end{aligned}
$$

8. (Adaptado do vestibular da ACAFE (SC) $-$ 2014)
Do enunciado podemos inferir uma P.G. decrescente de razão $q=0,9$ e $a_1=120$, cuja soma é

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{120}{1-0,9}\\
&= \frac{120}{0,1}\\
&= 120\cdot\frac{10}{1}\\
&= 1200.
\end{aligned}
$$

9. (Adaptado do Art of Problem Solving)
Perceba que cada novo quadrado possui área em alguma potência de $\left(\frac{1}{2}\right)$, sendo assim, a soma pedida fica

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots &=\\
\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} &=\\
\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

10. (Adaptado do vestibular da PUC (RS)$-$ 2013)
A situação reflete uma P.G. decrescente de razão $\frac{3}{4}$ e a soma dos comprimentos pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{2000}{1-\frac{3}{4}}\\
&= \frac{2000}{\frac{1}{4}}\\
&= 2000\cdot\frac{4}{1}\\
&= 8000 \text{ cm}\\
&= 80 \text{ metros.}
\end{aligned}
$$

11. (Adaptado do site Brilliant.org)
Cada novo triângulo central tem o perímetro metade do valor do perímetro do triângulo que o gerou. Sendo assim, temos uma P.G. decrescente de razão $\frac{1}{2}$ e $a_1=72$, cuja soma fica

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{72}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 72\cdot 2\\
&= 144 \text{ cm.}
\end{aligned}
$$

12. (Adaptado do AIME II)
De início, sendo $a_1=x$ e $q=\frac{m}{n}$, temos que

$$
2005 = \frac{x}{1-q} \qquad (1)
$$

$$
20050 = \frac{x^2}{1-q^2} \qquad (2)
$$

e ao dividir as duas equações, obteremos

$$
\begin{aligned}
\frac{2005}{20050} &= \frac{\frac{x}{1-q}}{\frac{x}{1-q^2}}\\
\frac{1}{10} &= \frac{x}{1-q}\cdot\frac{(1-q)(1+q)}{x^2}\\
\frac{1}{10} &= \frac{1+q}{x}\\
\frac{10}{1} &= \frac{x}{1+q},
\end{aligned}
$$

e ao dividirmos outra vez por (1), chegamos a

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{2005} &= \frac{\frac{x}{1+q}}{\frac{x}{1-q}}\\
\frac{10}{2005} &= \frac{1-q}{1+q}\\
2005-2005q &= 10+10q\\
2015q &= 1995\\
q &= \frac{1995}{2015}=\frac{399}{403}.
\end{aligned}
$$

Como 399 e 403 são primos entre si, podemos concluir

$$
m+n = 399+403 = 802.
$$

13. (Adaptado do AIME − 2016)
Como a razão pertence ao intervalo $]-1,1[$, temos uma P.G. decrescente com $S(q)$ o seu limite da soma. Dos dados do enunciado, podemos concluir

$$\begin{aligned}
a_1 &= 12\\
S(a) &= 12 + 12a + 12a^2 + 12a^3 + \ldots = \frac{12}{1-a}\\
S(-a) &= 12 - 12a + 12a^2 - 12a^3 + \ldots = \frac{12}{1-(-a)}\\
S(a)S(-a) &= 2016\\
\frac{12}{1-a} \cdot \frac{12}{1+a} &= 2016\\
\frac{144}{1-a^2} &= 2016\\
\frac{1}{1-a^2} &= 14\\
\frac{1-a^2}{1} &= \frac{1}{14}.\\
S(a) + S(-a) &= \frac{12}{1-a} + \frac{12}{1+a}\\
&= \frac{12(1+a) + 12(1-a)}{(1-a)(1+a)}\\
&= \frac{12 + 12a + 12 - 12a}{1-a^2}\\
&= \frac{24}{\frac{1}{14}} = 24 \cdot 14 = 336.
\end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com