Módulo de Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

Redução ao Primeiro Quadrante

7° ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas
Redução ao Primeiro Quadrante

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 2° quadrante para o 1° quadrante.

a) $\operatorname{sen} 120°$
b) $\operatorname{sen} 135°$
c) $\operatorname{sen} 150°$
d) $\cos 120°$
e) $\cos 135°$
f) $\cos 150°$
g) $\operatorname{tg} 120°$
h) $\operatorname{tg} 135°$
i) $\operatorname{tg} 150°$

Exercício 2. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 3° quadrante para o 1° quadrante.

a) $\operatorname{sen} 210°$
b) $\operatorname{sen} 225°$
c) $\operatorname{sen} 240°$
d) $\cos 210°$
e) $\cos 225°$
f) $\cos 240°$
g) $\operatorname{tg} 210°$
h) $\operatorname{tg} 225°$
i) $\operatorname{tg} 240°$

Exercício 3. Calcule os valores dos senos, cossenos e tangentes abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos do 4° quadrante para o 1° quadrante.

a) $\operatorname{sen} 330°$
b) $\operatorname{sen} 315°$
c) $\operatorname{sen} 300°$
d) $\cos 330°$
e) $\cos 315°$
f) $\cos 300°$
g) $\operatorname{tg} 330°$
h) $\operatorname{tg} 315°$
i) $\operatorname{tg} 300°$

Exercício 4. Calcule os valores das funções trigonométricas abaixo utilizando a redução dos respectivos arcos adequadamente a cada caso.

a) $\sec 120°$
b) $\operatorname{cossec} 315°$
c) $\operatorname{cotg} 300°$
d) $\operatorname{sen} 765°$
e) $\cos 1200°$
f) $\operatorname{tg} 2370°$

Exercício 5. Qual o valor de

$$A = \frac{\operatorname{cossec} 2460° \cdot \sec 1110°}{\operatorname{cotg} 2205°}?$$

Exercício 6. Dois ângulos distintos, menores que 360°, têm, para seno, o mesmo valor positivo. Qual a soma desses ângulos?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Sejam os arcos trigonométricos α, β e γ, tais que:

- α e β pertencem ao 1° quadrante e γ pertence ao 2° quadrante;
- α e β são complementares;
- α e γ são suplementares.

Nessas condições, qual a razão entre o $\operatorname{sen}\beta$ e o $\cos\gamma$?

Exercício 8. Se $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{4}$, qual o valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \pi)$?

Exercício 9. Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{2}{3} \cdot \operatorname{sen} 30° + \frac{1}{2} \cdot \cos 315° - 2 \cdot \cos 120°$.

b) $\cos 1200° - 2 \cdot \operatorname{sen} 1500°$.

c) $5 \cdot \cos 150° - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 30° + \frac{3}{4} \cdot \operatorname{sen} 330°$.

Exercício 10. Em qual quadrante se tem simultaneamente

a) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$

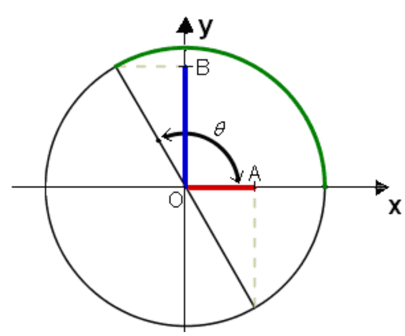
b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$

c) $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$

Exercício 11. Um ângulo tem sua extremidade no 2° quadrante e seu seno vale $\frac{3}{5}$. Qual o valor da tangente desse ângulo?

Exercício 12. Seja $x \in \mathbb{R}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\sec x = -\sqrt{5}$, qual o valor da $\operatorname{cotg} x$?

Exercício 13. No círculo trigonométrico da figura abaixo, tem-se $\theta = 120°$.



Qual o valor numérico do produto

$$\sqrt{3} \cdot OA \cdot OB?$$

Exercício 14. Qual o valor de $\cos 1200°$?

Exercício 15. Sendo $x = -\frac{105\pi}{4}$, quando o valor de

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x?$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Considere as afirmações a seguir:

I) $\operatorname{tg} 92° = -\operatorname{tg} 88°$

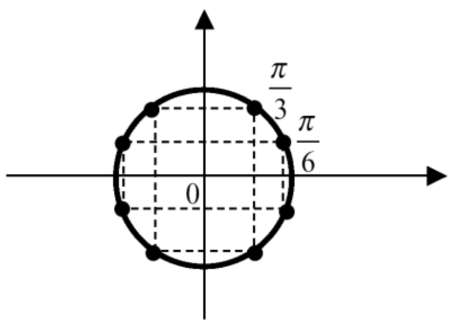
II) $\operatorname{tg} 178° = \operatorname{tg} 88°$

III) $\operatorname{tg} 268° = \operatorname{tg} 88°$

IV) $\operatorname{tg} 272° = -\operatorname{tg} 88°$

Quais estão corretas?

Exercício 17. Observe atentamente a simetria da figura abaixo.



Sabendo-se que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, então quais os valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{19}{6}\pi\right)$ e $\operatorname{sen}\left(-\frac{11}{6}\pi\right)$?

Exercício 18. Um arco x é tal que $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$. Sendo assim, qual o valor de $\operatorname{sen}(x+\pi)$?

Respostas e Soluções.

1. Para facilitar, lembre que o seno no 2° quadrante tem sinal positivo, o cosseno tem sinal negativo e a tangente é então negativa. Reduzindo para o primeiro quadrante, temos

a) $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$.

d) $\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

e) $\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

g) $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

h) $\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

i) $\operatorname{tg} 150° = -\operatorname{tg} 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Observe que o seno no 3° tem sinal negativo, o cosseno tem sinal negativo e a tangente é então positiva. Sendo assim, teremos que

a) $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -\dfrac{1}{2}$.

b) $\operatorname{sen} 225° = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos 225° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\cos 240° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

g) $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

h) $\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg} 45° = 1$.

i) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

3. Para facilitar, lembre que o seno no 4° quadrante tem sinal negativo, o cosseno tem sinal positivo e a tangente é negativa. Fazendo a redução para o primeiro quadrante, temos

a) $\operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\dfrac{1}{2}$.

b) $\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{sen} 300° = -\operatorname{sen} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $\cos 330° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos 315° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

g) $\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

h) $\operatorname{tg} 315° = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

i) $\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

4.

a) $\sec 120° = \dfrac{1}{\cos 120°} = -\dfrac{1}{\cos 60°} = -2$.

b) $\operatorname{cossec} 315° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 315°} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} 45°} = -\sqrt{2}$.

c) $\operatorname{cotg} 300° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 300°} = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} 60°} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\operatorname{sen} 765° = \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\cos 1200° = \cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

f) $\operatorname{tg} 2370° = \operatorname{tg} 210 = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. (Adaptado do vestibular da UEPB)
Temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{cossec} 2460° = \operatorname{cossec} 300° &= \frac{1}{\operatorname{sen} 300°} = -\frac{1}{\operatorname{sen} 60°} = -\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \sec 1110° = \sec 30° &= \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e}\\ \operatorname{cotg} 2205° = \operatorname{cotg} 45° &= \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = 1.\end{aligned}$$

Daí, escrevemos

$$\begin{aligned}A &= \frac{\operatorname{cossec} 2460° \cdot \sec 1110°}{\operatorname{cotg} 2205°}\\ &= \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})}{1} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular da UFJF(MG))
Ângulos com mesmo seno positivo estão no primeiro e segundo quadrantes e podem ser escritos como α e $180^\circ - \alpha$. Portanto, a soma deles é

$$\alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

7. (Adaptado do vestibular da UNIFOR(CE))
Como α e β são complementares, então $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$. Agora, para α e γ suplementares temos $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\gamma$ e $\cos\alpha = -\cos\gamma$. Por fim, a razão pedida fica

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -1.$$

8. Perceba que $(\alpha + \pi)$ é o simétrico de α em relação à origem. Assim, o seno mudará de sinal mas terá o mesmo valor absoluto, ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \pi) = \frac{1}{4}.$$

9.

a) $$\begin{aligned} \frac{2}{3}\cdot\operatorname{sen}30^\circ + \frac{1}{2}\cdot\cos 315^\circ - 2\cdot\cos 120^\circ &= \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 45^\circ - 2\cdot(-\cos 60^\circ) &= \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) &= \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \cos 1200^\circ - 2\cdot\operatorname{sen}1500^\circ &= \\ \cos 120^\circ - 2\cdot\operatorname{sen}60^\circ &= \\ -\cos 60^\circ - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ &= -\frac{1}{2} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5\cdot\cos 150^\circ - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}30^\circ + \frac{3}{4}\cdot\operatorname{sen}330^\circ &= \\ 5\cdot(-\cos 30^\circ) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4}\cdot(-\operatorname{sen}30^\circ) &= \\ -5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) &= \\ &= -\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

10. Analisando o ciclo trigonométrico, temos:

a) 3°

b) 2°

c) 1°

11. Seja α o ângulo em questão. Como ele pertence ao 2° quadrante, tem cosseno negativo e tangente negativa. Dado que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, podemos aplicar a fórmula fundamental chegando a

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\ \frac{9}{25} + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha &= 1 - \frac{9}{25} \\ \cos^2\alpha &= \frac{16}{25} \\ \cos\alpha &= \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \\ \cos\alpha &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

12. Perceba que x pertence ao 3° quadrante, logo tem cosseno negativo e cotangente positiva. Com o $\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{5}$, temos $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e, ao aplicar a fórmula fundamental, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{5} &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \frac{1}{5} \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{4}{5} \\ \operatorname{sen} x &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \\ \operatorname{sen} x &= -\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}$.

13. Perceba que $OA = -\cos 120^\circ = -(-\cos 60^\circ) = \frac{1}{2}$ e $OB = \cos 120^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, a expressão pedida equivale a

$$\sqrt{3}\cdot OA\cdot OB = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

14. Temos que $1200^\circ = 3\cdot 360^\circ + 120^\circ$. Então

$$\cos 1200^\circ = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ.$$

15. Perceba que $x = -\dfrac{105\pi}{4} = -\dfrac{104\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -26\pi - \dfrac{\pi}{4}$, ou seja, $x = -\dfrac{105\pi}{4}$ é côngruo a $-\dfrac{\pi}{4}$. Agora, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x &= \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\\
&= -\frac{\sqrt{2}+2}{2}.
\end{aligned}$$

16. (Adaptado do vestibular da UFRGS)

I) $\operatorname{tg} 92^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 92^\circ) = -\operatorname{tg} 88^\circ$

II) $\operatorname{tg} 178^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 178^\circ) = -\operatorname{tg} 2^\circ \neq \operatorname{tg} 88^\circ$

III) $\operatorname{tg} 268^\circ = \operatorname{tg}(268^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 88^\circ$

IV) $\operatorname{tg} 272^\circ = -\operatorname{tg}(360 - 272) = -\operatorname{tg} 88^\circ$

Ficamos com I, III e IV sendo verdadeiras.

17. (Adaptado do vestibular da UNIMONTES - MG)
Observe que

$$\frac{19\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

Assim, concluímos que $\dfrac{19\pi}{6}$ é côngruo a $\dfrac{7\pi}{6}$. Sendo assim, podemos fazer

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{19\pi}{6} &= \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right)\\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, ficamos com

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen}\left(-\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

18. (Adaptado do vestibular da UFAM)
Como $\operatorname{sen} x < 0$ temos x ou no III ou no IV quadrante. Ao considerarmos $x + \pi$, ficaremos com o novo arco no I ou no II quadrante. Qualquer um deles tem seno positivo e mesmo valor em módulo. Sendo assim, $\operatorname{sen}(x + \pi) = \dfrac{3}{5}$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com