Função Exponencial

Gráfico da Função Exponencial

1° **ano E.M.**

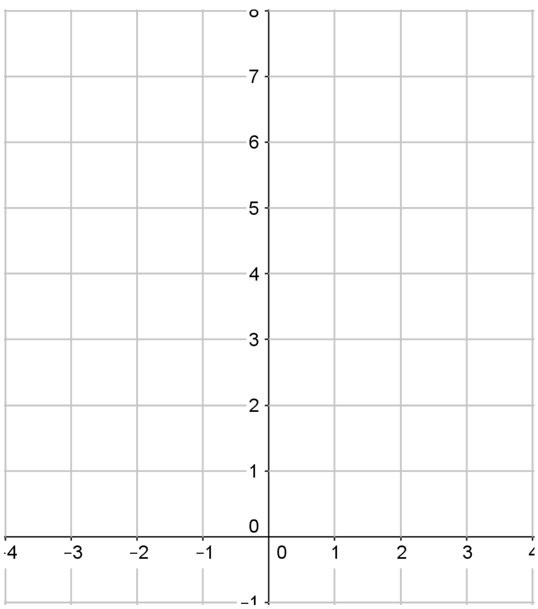
Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

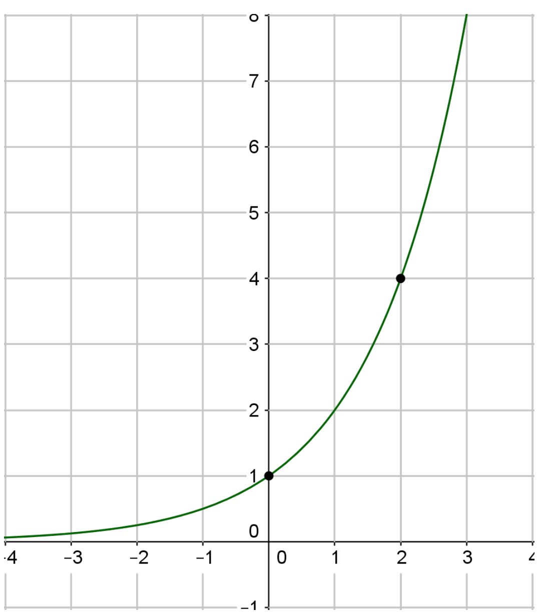
Função Exponencial
Gráfico da Função Exponencial

1 Exercícios Introdutórios

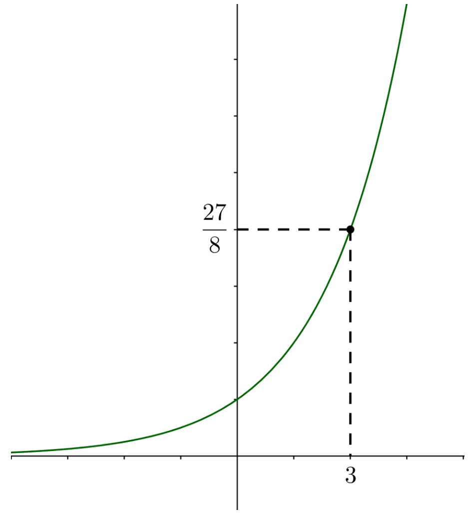
Exercício 1. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, usando os pontos cujos valores de x pertencem ao conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.



Exercício 2. Seja a função exponencial $f(x) = a^x$, representada pelo gráfico abaixo. Determine o valor de a.



Exercício 3. Determine o valor de a na função $f(x) = a^x$, cujo gráfico está na figura.



Exercício 4. Seja uma função exponencial, cuja lei de formação é $f(x) = a^x$, e cujo gráfico é uma curva crescente. Um possível valor para a é:

(a) -2.

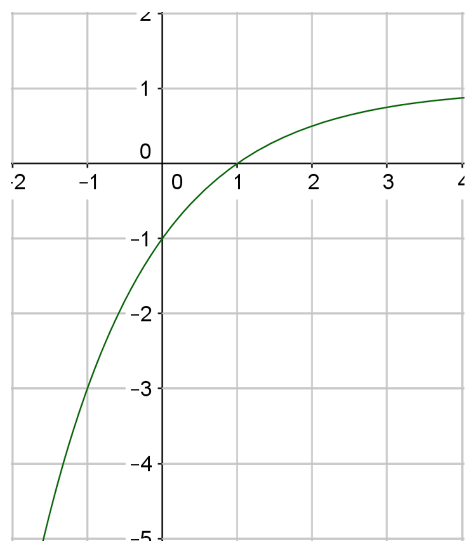
(b) -1.

(c) 0.

(d) 1.

(e) 2.

Exercício 5. Analise o gráfico da função exponencial abaixo e determine sua raiz.



Exercício 6. Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \frac{1}{9}$.

Exercício 7. O gráfico da função $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ é:

a) uma parábola.

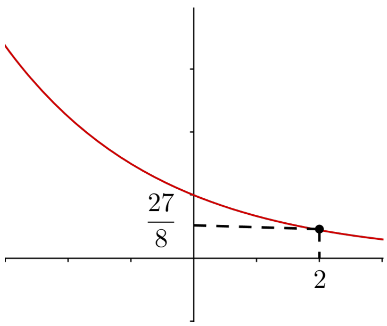
b) uma reta crescente.

c) uma curva crescente.

d) uma reta decrescente.

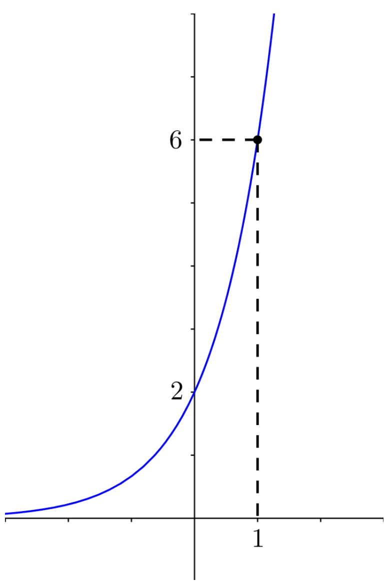
e) uma curva decrescente.

Exercício 8. Determine o valor de a na função exponencial $f(x) = a^x$, cujo gráfico está na figura.

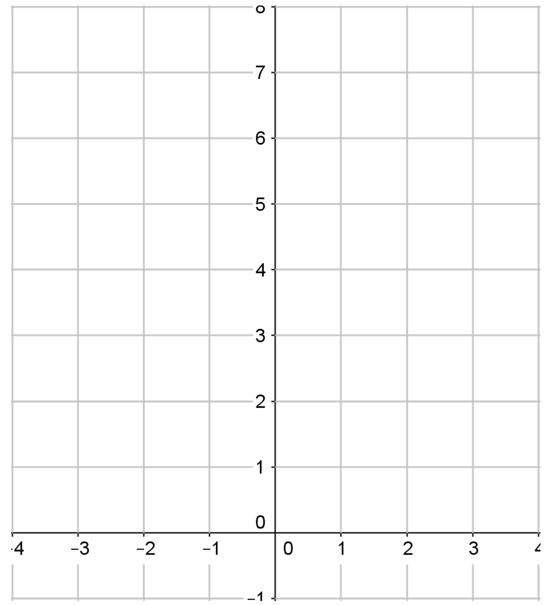


2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Seja a função $f(x) = k \cdot a^x$. Analise o gráfico de f na figura e determine a e k.



Exercício 10. Utilize o plano cartesiano da figura para fazer um esboço do gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$.



Exercício 11. Quais das funções exponenciais abaixo são crescentes?

a) $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

b) $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

c) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

d) $p(x) = 2^{-x}$.

e) $q(x) = 1 - 3^x$.

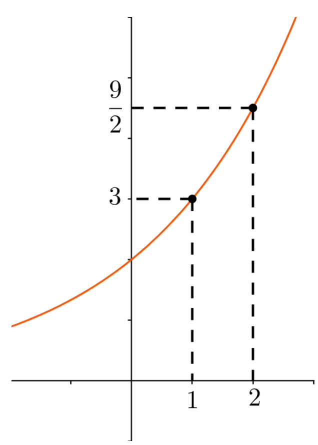
Exercício 12. Construa o gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{1-x}$ e determine:

a) a raiz da função.

b) a imagem da função.

Exercício 13. Existe solução real para a equação $2^{x-1} = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

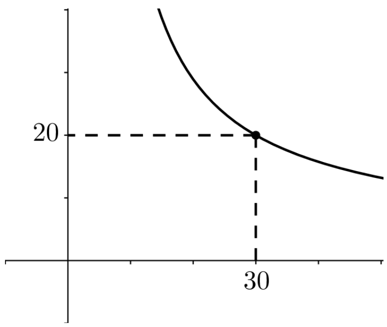
Exercício 14. Analise o gráfico da função exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ e determine:



a) os valores das constantes a e k.

b) $f(0)$ e $f(3)$

Exercício 15. Conforme os dados obtidos pelo IBGE, relativos às taxas percentual de analfabetismo da população brasileira de 15 anos ou mais, a partir de 1960 (tempo zero) foi possível ajustar uma curva de equação $y = 30 \cdot k^x + 10$, $k > 0$ e x o tempo em anos, representada a seguir:



a) Determine o valor de k.

b) Determine as taxas relativas aos anos de 1960 e 2020.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Seja uma cultura de bactérias que cresce de forma exponencial em um certo meio. Em determinado momento (tempo inicial) existem 2.000 bactérias e após 30 minutos esse número passou para 4.000. Quantas bactérias estarão presentes neste meio após 2 h?

Exercício 17. A expressão $P(t) = K \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300.000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352000.

b) 401000.

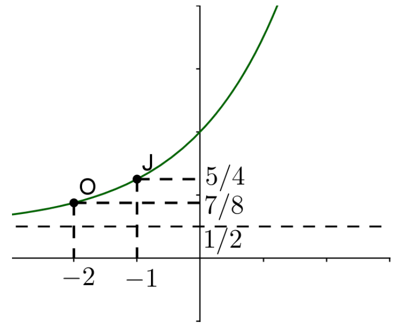
c) 423000.

d) 439000.

e) 441000.

Exercício 18. O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?

Exercício 19. Seja a função $f(x) = a + c \cdot b^x$, cujo gráfico é:



Determine os valores de a, b e c.

Exercício 20. Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

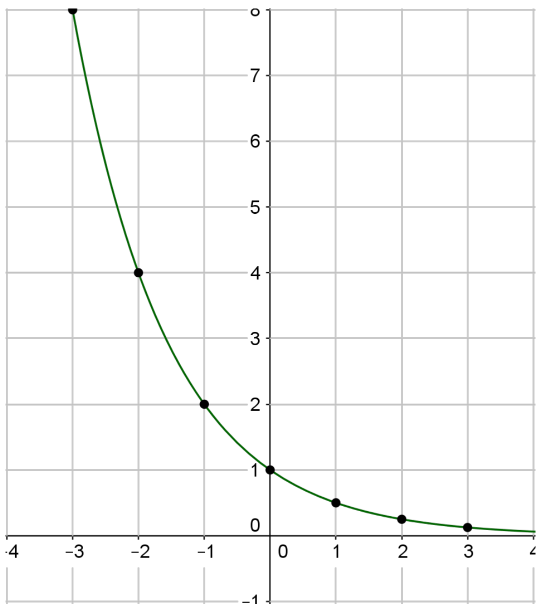
c) 3.

d) 4.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.



2. Substituindo o ponto $(2, 4)$ na função, temos $4 = a^2$, segue que $a = 2$, pois a função é crescente.

3. Substituindo o ponto $\left(3, \dfrac{27}{8}\right)$ na função, temos $\dfrac{27}{8} = a^3$, que implica em $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = a^3$, segue que $a = \dfrac{3}{2}$.

4. Se a função exponencial é crescente, então $a > 1$. Resposta E.

5. Como a interseção do gráfico da função com o eixo x ocorre apenas em $x = 1$, então a função possui esta única raiz.

6.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3^x &= \frac{1}{9} \\ 3^x &= 3^{-2} \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto de interseção dos gráficos é $\left(-2, \dfrac{1}{9}\right)$.

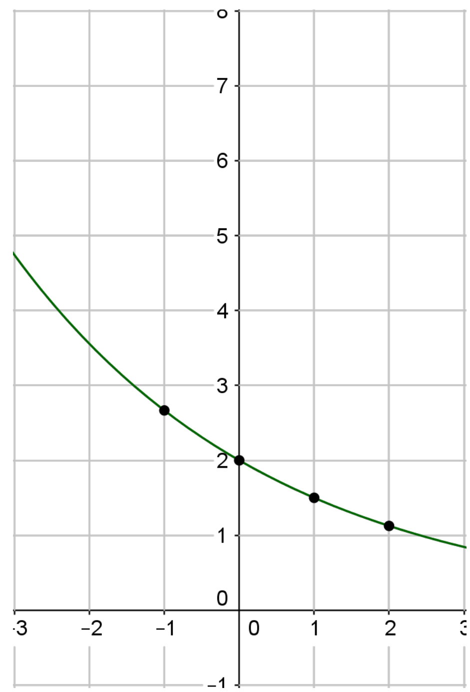
7. Como se trata de uma função exponencial, $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$, cujo $a < 1$, o gráfico é uma curva decrescente. Resposta E.

8.

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \\ \frac{27}{8} &= a^2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^3 &= a^2 \\ a &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

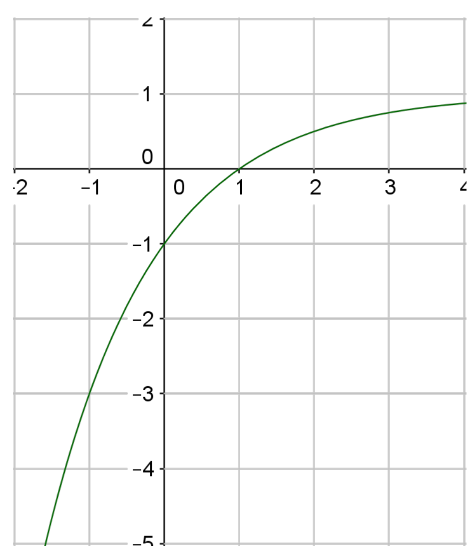
9. Temos dois pontos: $(0, 2)$ e $(1, 6)$. Substituindo o primeiro, obtemos $2 = k \cdot a^0$, segue que $k = 2$; substituindo o segundo, obtemos $6 = 2 \cdot a^1$, segue que $a = 3$.

10. Substituindo alguns valores convenientes de x, obtemos os pontos $\left(-1, \dfrac{8}{3}\right)$, $(0, 2)$, $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ e $\left(2, \dfrac{9}{8}\right)$. Temos, portanto:



11. Apenas $g(x)$.

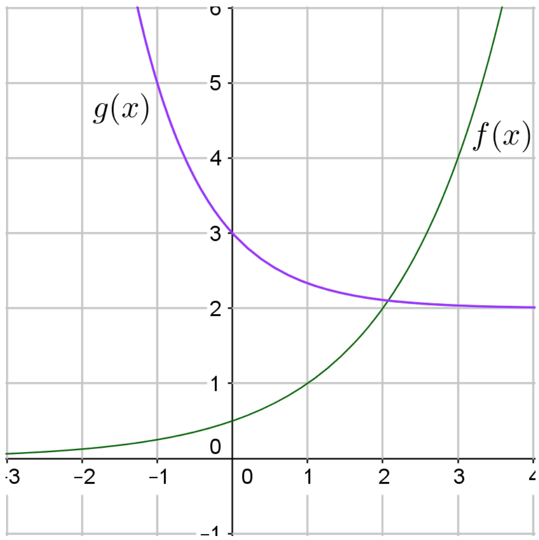
12.



a) A raiz da função é 1.

b) 2^{1-x} aproxima-se de zero, conforme o valor de x vai aumentando, mas nunca será zero. Assim, $1 - 2^{1-x}$, aproxima-se de 1, mas sem chegar a 1, quando x aumenta. Temos portanto que a imagem é $(-\infty, 1)$.

13. Vamos tomar as funções $f(x) = 2^{x-1}$ e $g(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. Construindo seus gráficos, temos:



Como existe interseção entre as funções, então a equação possui raiz.

14. (Extraído da Vídeo Aula) Substituindo o ponto $(1, 3)$ na equação, temos $ka = 3$ (I) e, substituindo o ponto $\left(2, \dfrac{9}{2}\right)$, temos $ka^2 = \dfrac{9}{2}$, donde, substituindo (I), chegamos a $a \cdot 3 = \dfrac{9}{2}$, segue que $a = \dfrac{3}{2}$ e, consequentemente, $k = 2$.

15. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Substituindo o ponto $(30, 20)$ temos:

$$\begin{aligned} 20 &= 30 \cdot k^{30} + 10 \\ 10 &= 30 \cdot k^{30} \\ \frac{1}{3} &= k^{30} \\ k &= 3^{-\frac{1}{30}}. \end{aligned}$$

b) Pelo item anterior, temos $f(x) = y = 30 \cdot 3^{-\frac{x}{30}} + 10$. Assim, $f(0) = 30 \cdot 3^{-\frac{0}{30}} + 10 = 40\%$ e $f(60) = 30 \cdot 3^{-\frac{60}{30}} + 10 = 30 \cdot \dfrac{1}{9} + 10 \cong 13,33\%$.

16. Se essa cultura cresce exponencialmente, temos $f(x) = k \cdot a^x$, sendo x o tempo em horas, k uma constante e f a quantidade de bactérias. Temos, então, $f(0) = k \cdot a^0 = 2000$, segue que $k = 2000$ e $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2000 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 4000$, donde $a = 4$. Portanto, após 2 horas, teremos $f(2) = 2000 \cdot 4^2 = 32000$ bactérias.

17. (Extraído do UNEB - BA) Usando o ano de 1990 como tempo zero, temos $300.000 = K \cdot 2^0$, segue que $K = 300.000$. Em 2000, teremos $t = 10$, ou seja, $P(10) = 300.000 \cdot 2^{0,5} = 300.000 \cdot \sqrt{2} \cong 423.000$. Resposta C.

18. (Extraído da FMJ - SP) Temos, para 38.400:

$$\begin{aligned} N(t) &= 1.200 \cdot 2^t \\ 38.400 &= 1.200 \cdot 2^t \\ 32 &= 2^t \\ 2^5 &= 2^t \\ t &= 5. \end{aligned}$$

Portanto, após 5 horas do início da experiência haverá 38.400 bactérias.

19. (Extraído da Vídeo Aula) Se a assíntota da curva é a reta $y = \dfrac{1}{2}$, então temos $a = \dfrac{1}{2}$. Utilizando o primeiro ponto do gráfico, $\left(-1, \dfrac{5}{4}\right)$, temos $\dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{2} + c \cdot b^{-1}$, segue que $\dfrac{c}{b} = \dfrac{3}{4}$ (I). Usando agora o segundo ponto, $\left(-2, \dfrac{7}{8}\right)$, ficamos com $\dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{1}{b}$, que, substituindo (I), chegamos a $b = 2$ e, consequentemente, $c = \dfrac{3}{2}$.

20. (Extraído da Unicamp - 2017) $f(g(x)) = 3^{g(x)} = 3^{x^3}$ e $g(f(x)) = f(x)^3 = (3^x)^3 = 3^{3x}$. Assim:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(f(x)) \\ 3^{x^3} &= 3^{3x} \\ x^3 &= 3x \\ x^3 - 3x &= 0 \\ x(x^2 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos $x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, donde $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$, ou seja, três soluções.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM