

# Módulo de Áreas de Figuras Planas

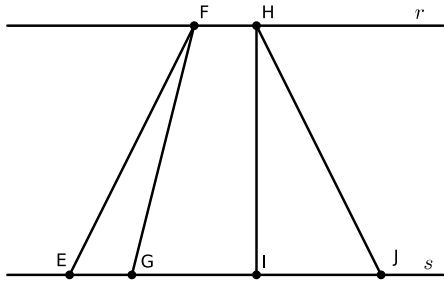
## Áreas de Figuras Planas: Mais alguns Resultados

**Nono Ano**



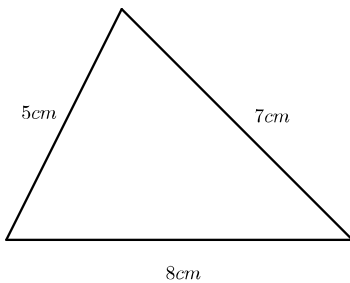
## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** No desenho abaixo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. Se o segmento  $IJ$  é o dobro do segmento  $EG$ , determine a razão entre as áreas dos triângulos  $\triangle FEG$  e  $\triangle HIJ$ .

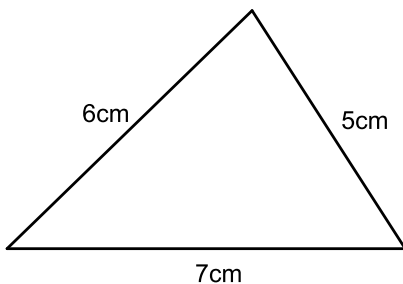


**Exercício 2.** A fórmula de Heron afirma que a área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  é dada por  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , onde  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Calcule a área dos triângulos abaixo.

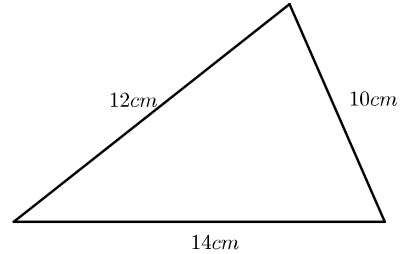
a)



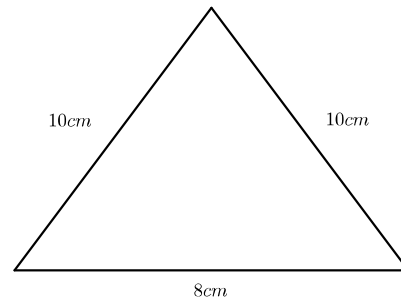
b)



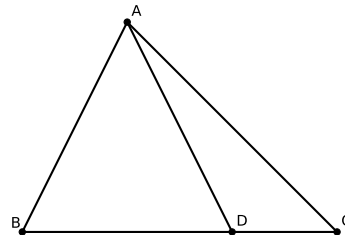
c)



d)



**Exercício 3.** No desenho abaixo, a área do triângulo  $\triangle ABD$  é  $30m^2$  e a área do triângulo  $\triangle ADC$  é  $10m^2$ . Determine a razão entre os segmentos  $BD$  e  $DC$ .

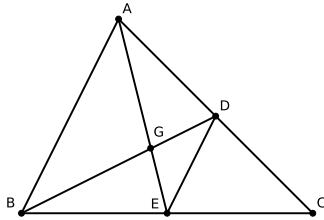


**Exercício 4.** No desenho abaixo,  $E$  e  $D$  são os pontos médios dos lados  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $\triangle ABC$ .

a) Encontre a razão entre as áreas dos triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle BED$ .

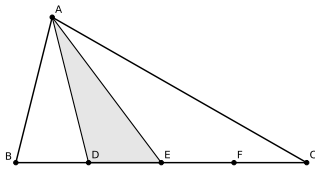
b) Encontre a razão entre os segmentos  $AG$  e  $GE$ .

Observação: O ponto  $G$  é chamado de Baricentro do Triângulo  $ABC$ . Como consequência deste exercício, podemos concluir que o Baricentro divide cada mediana em dois segmentos na razão  $2 : 1$ .

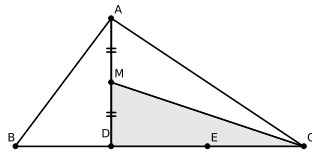


**Exercício 5.** Em cada um dos itens abaixo, a área do triângulo  $ABC$  vale  $36m^2$ . Determine a área de cada região sombreada sabendo que os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais.

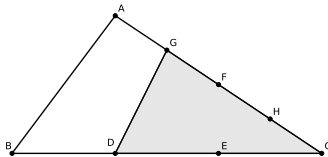
a)



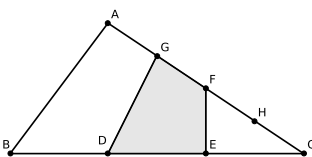
b)



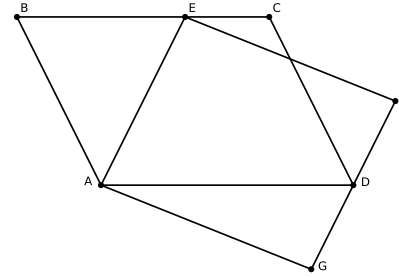
c)



d)

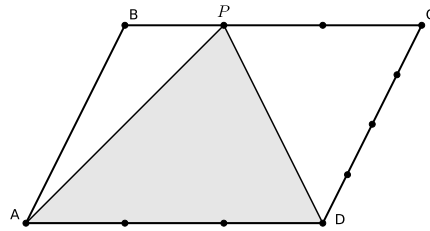


**Exercício 6.** No desenho abaixo,  $ABCD$  e  $AEFG$  são paralelogramos. Se a área de  $ABCD$  é  $20cm^2$ , determine a área do paralelogramo  $EFGA$ .

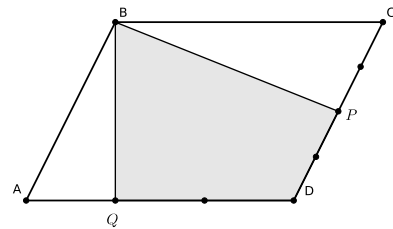


**Exercício 7.** Nos desenhos abaixo, o paralelogramo  $ABCD$  possui área  $24cm^2$  e os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais. Determine a área das regiões sombreadas.

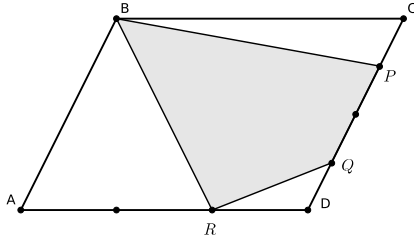
a)



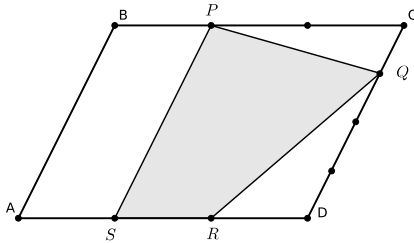
b)



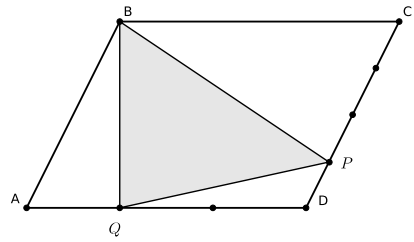
c)



d)



e)



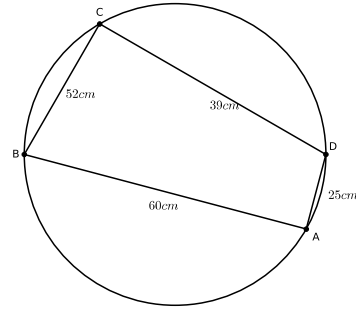
## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 8.** Calcule a área de um triângulo cujos lados medem  $13\text{cm}$ ,  $14\text{cm}$  e  $15\text{cm}$ .

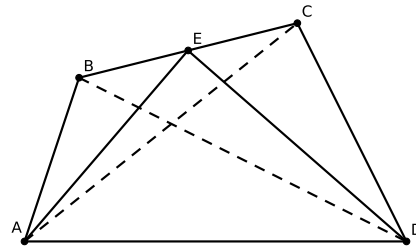
**Exercício 9.** No triângulo  $ABC$ ,  $AC = 5$  e  $AB = 6$ . Seja  $P$  um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo  $\angle BAC$ . Se a área de  $APB$  é  $3/2$ , a área de  $APC$  é:

- a)  $5/4$     b)  $9/5$     c)  $\sqrt{3}/4$     d)  $\sqrt{5}/4$     e)  $4/5$

**Exercício 10.** A área de um quadrilátero inscrito em um círculo e que possui lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  é  $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$  onde  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ . No quadrilátero do desenho abaixo, determine a sua área.



**Exercício 11.** No desenho abaixo,  $E$  é o ponto médio do lado  $BC$ . Se as áreas dos triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$  são 20 e 30, determine a área do triângulo  $\triangle AED$ .



**Exercício 12.** Seja  $ABCD$  um trapézio de bases  $AB = 10$  e  $CD = 6$ . A altura mede 4. Seja  $P$  o ponto médio do lado  $AD$  e  $Q$  o ponto médio do lado  $BC$ . Encontre a área do triângulo  $PQC$ .

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 13.** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo com lados de medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Se  $h_a$  é o comprimento da altura relativa ao vértice  $A$  e  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , verifique que:

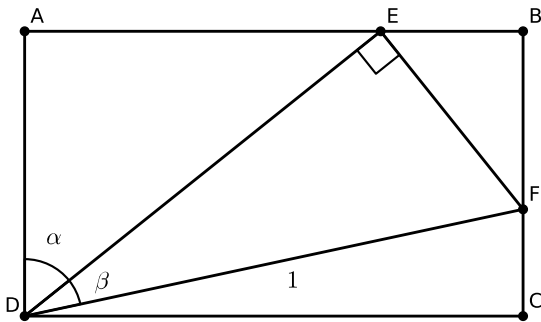
a)  $h_a = \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$ .

b)  $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

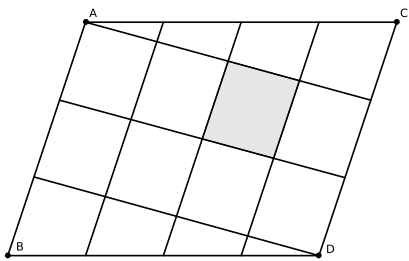
**Exercício 14.** Na figura abaixo,  $\triangle DEF$  é um triângulo retângulo com  $\angle DEF = 90^\circ$  e  $DF = 1$ . Se  $\angle FDE = \beta$  e  $\angle ADE = \alpha$ :

a) Encontre as medidas dos segmentos  $AE$ ,  $EB$  e  $DC$ ;

b) Mostre que  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$



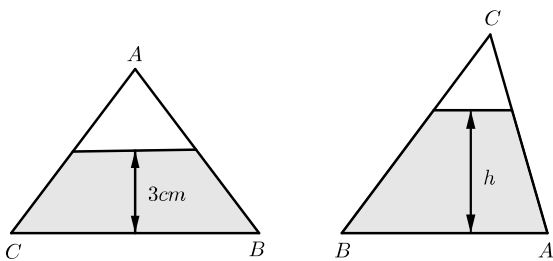
**Exercício 15.** Os lados  $AC$  e  $BD$  do paralelogramo  $ABCD$  foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados  $AB$  e  $CD$  foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de  $ABCD$  é 84, determine a área sombreada.



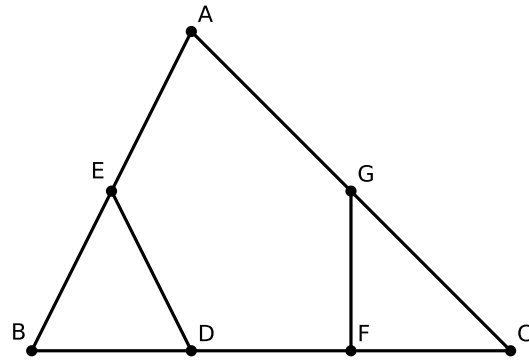
- a) 1                      b) 3                      c) 4                      d) 7  
e) 12

**Exercício 16.** Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados  $BC = 6$  cm e  $AB = AC = 5$  cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado  $BC$ , a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o peso de papel se apoia sobre o lado  $AB$ ?

- a)  $\frac{4}{3}$     b)  $\frac{3}{2}$     c)  $\frac{8}{5}$     d)  $\frac{18}{5}$     e)  $\frac{24}{5}$

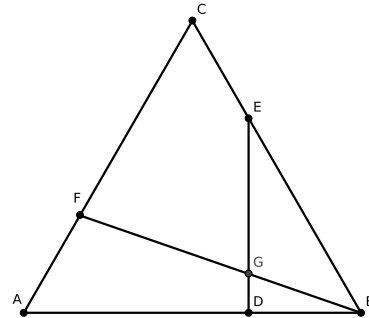


**Exercício 17.** Na figura ao lado,  $E$  é o ponto médio de  $AB$ ,  $G$  é o ponto médio de  $AC$  e  $BD = DF = FC$ . Se a área do triângulo  $ABC$  é 252, qual é a área do pentágono  $AEDFG$ ?



- a) 168    b) 189    c) 200    d) 210    e) 220

**Exercício 18.** No desenho abaixo, o  $\triangle ABC$  é equilátero e  $BD = CE = AF = \frac{AB}{3}$ . Determine a razão  $\frac{EG}{GD}$ .



## Respostas e Soluções

### 1 Exercícios Introdutórios

1. Seja  $h$  a distância entre as duas retas. Este também é o valor da altura dos triângulos  $\triangle EFG$  e  $\triangle HIJ$ . Assim

$$\begin{aligned}\frac{[EFG]}{[HIJ]} &= \frac{h \cdot EG/2}{h \cdot IJ/2} \\ &= \frac{EG}{IJ} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2.

a) Como o semiperímetro mede  $10\text{cm}$ , temos  $A = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = 10\sqrt{3}\text{cm}^2$ .

b) Como o semiperímetro mede  $9\text{cm}$ , temos  $A = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6}\text{cm}^2$ .

c) Como o semiperímetro mede  $18\text{cm}$ , temos  $A = \sqrt{18(18-12)(18-10)(18-14)} = 24\sqrt{6}\text{cm}^2$ .

d) Como o semiperímetro mede  $9\text{cm}$ , temos  $A = \sqrt{14(14-10)(14-10)(14-8)} = 8\sqrt{21}\text{cm}^2$ .

3. Se  $h$  é a altura relativa ao lado  $BC$ , temos  $30 = \frac{BD \cdot h}{2}$  e  $10 = \frac{DC \cdot h}{2}$ . Portanto,

$$3 = \frac{30}{10} = \frac{BD \cdot h}{DC \cdot h} = \frac{BD}{DC}.$$

4.

a) Como  $D$  é ponto médio de  $AC$ , segue que  $[ABD] = [BDC] = [ABC]/2$ . Além disso, como  $E$  é ponto médio de  $BC$ , segue que  $[BED] = [BDC]/2 = [ABC]/4$ .

b) Considere os triângulos da figura de bases  $AG$  e  $GE$ , assim

$$\frac{AG}{GE} = \frac{[AGD]}{[GDE]} = \frac{[ABG]}{[BGE]}$$

Conseqüentemente, usando propriedades de proporções, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AG}{GE} &= \frac{[AGD] + [ABG]}{[GDE] + [BGE]} \\ &= \frac{[ABD]}{[BDE]} \\ &= \frac{[ABC]/2}{[ABC]/4} \\ &= 2.\end{aligned}$$

5. a) Os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle ABC$  possuem mesma altura mas a razão entre suas bases é  $\frac{1}{4}$ . Portanto,  $[ADE] = \frac{1}{4} \cdot [ABC] = 9\text{cm}^2$ .

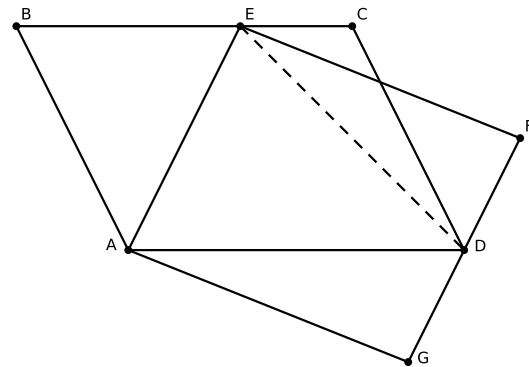
b) Como  $DC = \frac{2}{3} \cdot BC$ , temos  $[ADC] = \frac{2}{3} \cdot [ABC] = 24\text{cm}^2$ . Como  $M$  é o ponto médio de  $AD$ , as áreas dos triângulos  $\triangle AMC$  e  $\triangle MDC$  são iguais e valem metade da área do  $\triangle ADC$ . Portanto,  $[MDC] = 12\text{cm}^2$ .

c) Como  $DC = \frac{2}{3} \cdot BC$ , temos  $[ADC] = \frac{2}{3} \cdot [ABC] = 24\text{cm}^2$ . Além disso, como  $GC = \frac{3}{4} \cdot AC$ , segue que  $[GDC] = \frac{3}{4} \cdot [ADC] = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18\text{cm}^2$ .

d) Em virtude do item anterior,  $[GDC] = 18\text{cm}^2$ . Como  $E$  é ponto médio de  $DC$ , segue que  $[GDE] = [GEC] = 9$ . Também temos  $GF = \frac{1}{3} \cdot GC$  e daí  $[GEF] = \frac{1}{3} \cdot [GEC] = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3\text{cm}^2$ . Portanto,

$$[GDEC] = [GDE] + [GEF] = 9 + 3 = 12\text{cm}^2.$$

6. Trace o segmento  $ED$ . O triângulo  $EAD$  possui metade da área do paralelogramo  $ABCD$  pois possui a mesma base e a mesma altura. Pelo mesmo argumento, também possui metade da área do paralelogramo  $EFGA$ . Assim, as áreas de ambos paralelogramos são iguais a  $20\text{cm}^2$ .



7.

a) O triângulo sombreado possui a mesma base e altura que o paralelogramo dado. Portanto, sua área vale  $\frac{24}{2} = 12\text{cm}^2$ .

b) Como  $AQ = \frac{AD}{3}$  e  $PC = \frac{CD}{2}$ , segue que  $[ABQ] = \frac{[ABD]}{3}$  e  $[BCP] = \frac{[BDC]}{2}$ . Portanto, como a diagonal  $BD$  divide o paralelogramo em dois triângulos de

mesma área, temos

$$\begin{aligned} [BQDP] &= [ABCD] - \frac{[ABD]}{3} - \frac{[BDC]}{2} \\ &= [ABCD] - \frac{[ABCD]}{6} - \frac{[ABCD]}{4} \\ &= 14\text{cm}^2 \end{aligned}$$

c) Temos  $[BAR] = \frac{2[ABD]}{3} = 8\text{cm}^2$  e  $[BPC] = \frac{[BDC]}{4} = 3\text{cm}^2$ . Além disso,

$$[RDQ] = \frac{[AQD]}{3} = \frac{[ACD]}{12} = 1\text{cm}^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} [BPQR] &= [ABCD] - [ABR] - [BPC] - [RQD] \\ &= 24 - 8 - 3 - 1 \\ &= 12\text{cm}^2. \end{aligned}$$

d) O paralelogramo  $ABCD$  pode ser dividido em três paralelogramos congruentes à  $BPSA$ . Como sua área vale 24, a área do paralelogramo  $PCDS$  vale  $16\text{cm}^2$ . Além disso,  $[PQC] = \frac{[PDC]}{4} = \frac{8}{4}$  e  $[RQD] = \frac{[SQD]}{2} = 3$ . Portanto,  $[PQRS] = \frac{[PCDS]}{4} - [PCQ] - \frac{[QDR]}{2} = 16 - \frac{8}{4} - 3 = 11$ .

e) Temos  $[ABQ] = \frac{[ABD]}{4} = 3\text{cm}^2$  e  $[BCP] = \frac{3[BCD]}{4} = 9\text{cm}^2$ . Além disso,  $[PQD] = \frac{2[APD]}{3} = 2\text{cm}^2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} [BPQ] &= [ABCD] - [BCP] - [PDQ] - [ABQ] \\ &= 24 - 9 - 2 - 3 \\ &= 10\text{cm}^2. \end{aligned}$$

## 2 Exercícios de Fixação

8. Como o semiperímetro mede  $21\text{cm}$ , portanto,  $A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84\text{cm}^2$ .

9. (Extraído da OBM 2014) Sendo  $Q$  o ponto de intersecção da bissetriz de  $\angle BAC$  com o lado  $BC$ , temos que, pelo Teorema da Bissetriz Interna,  $\frac{5}{CQ} = \frac{6}{BQ}$ , ou seja,

$\frac{BQ}{CQ} = \frac{6}{5}$ . Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{CQ} &= \frac{[ABQ]}{[ACQ]} \\ &= \frac{[BPQ]}{[CPQ]} \\ &= \frac{[ABQ] - [BPQ]}{[ACQ] - [CPQ]} \\ &= \frac{[ABP]}{[ACP]} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

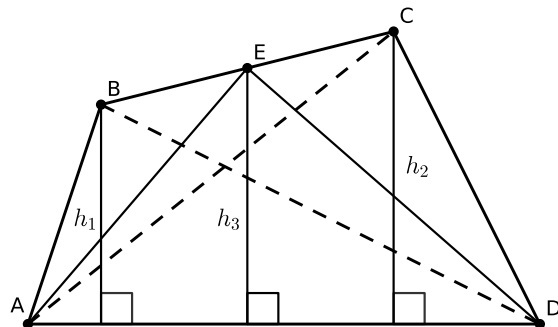
Assim,  $[APC] = 5/4$ . Resposta A.

10. Pela fórmula de Brahmagupta, sua área é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ &= \sqrt{(88-39)(88-25)(88-60)(88-52)} \\ &= \sqrt{49 \cdot 63 \cdot 28 \cdot 36} \\ &= 1764. \end{aligned}$$

11. Sejam  $h_1, h_2$  e  $h_3$  as distâncias dos vértices  $B, E$  e  $C$  ao lado  $AD$ , respectivamente. Como  $E$  é ponto médio de  $BC$ , temos  $h_3 = \frac{h_1 + h_2}{2}$ . Assim

$$\begin{aligned} [EAD] &= \frac{h_3 \cdot AD}{2} \\ &= \frac{(h_1 + h_2)AD}{4} \\ &= \frac{h_1 \cdot AD}{4} + \frac{h_2 \cdot AD}{4} \\ &= \frac{[ABD]}{2} + \frac{[ACD]}{2} \\ &= 10 + 15 \\ &= 25. \end{aligned}$$



12. Pelo exercício anterior,

$$\begin{aligned} [PCB] &= \frac{[DCB]}{2} + \frac{[ACB]}{2} \\ &= \frac{6 \cdot 4}{4} + \frac{10 \cdot 4}{4} \\ &= 6 + 10 \\ &= 16\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Como  $Q$  é o ponto médio de  $PB$ , segue que  $[PQC] = \frac{[PCB]}{2} = 8\text{cm}^2$ .

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

13.

a) Pela fórmula de Heron, temos:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = [ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\text{Consequentemente, } h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

b) Sejam  $x = p - b$  e  $y = p - c$ . Daí, como  $(x - y)^2 \geq 0$ , segue que

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 4xy \\ x + y &\geq 2\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Como  $x + y = 2p - b - c = a$ , temos

$$\begin{aligned} h_a &= \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \\ &\leq \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{a}{a} \\ &= \sqrt{p(p-a)}. \end{aligned}$$

Observação: Neste item, demonstramos também a desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica para dois termos:

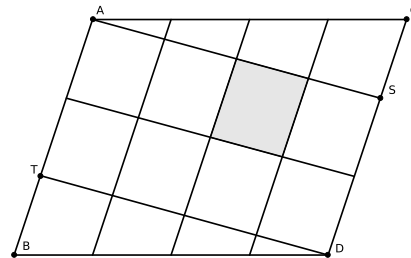
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ se } x, y \geq 0.$$

14.

a) Como  $DF = 1$ , segue que  $DE = DF \cos \beta = \cos \beta$  e  $EF = DF \sin \beta = \sin \beta$ . Além disso, dado que  $\angle ADE = \alpha$ , obtemos  $\angle BEF = 90^\circ - \alpha$ . Assim,  $AE = DE \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$  e  $EB = EF \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$ . Como  $\angle FDC = 90^\circ - \alpha - \beta$ , segue que  $DC = DF \cos(90^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ .

b) Como  $AE + EB = AB = DC$ , substituindo os valores encontrados no item anterior, obtemos o resultado desejado.

15. (Extraído da OBM 2012) Considerando o paralelogramo  $ASDT$ , como  $AT = \frac{2AB}{3}$ , temos que a área de  $ASDT$  é igual a  $\frac{2}{3} \cdot 84 = 56$ . Este paralelogramo está dividido em oito paralelogramos iguais, sendo que a área sombreada é um destes paralelogramos e, portanto, a área desejada é  $\frac{1}{8} \cdot 56 = 7$ .



16. (Extraído da OBM 2011) Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . Então, como  $ABC$  é isósceles com  $AB = AC$  o segmento  $AM$  é também altura do triângulo. Logo

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4.$$

Como a altura da água é 3, o nível da água é igual a  $\frac{3}{4}$  da altura do triângulo. Como os triângulos pequenos brancos formados pelos espaços são semelhantes ao triângulo original com a mesma razão de semelhança (raiz quadrada da razão entre as áreas, que é a mesma), a altura  $h$  é igual a  $\frac{3}{4}$  da altura relativa  $H$  a  $B$ . Sendo a área de  $ABC$  igual a  $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12\text{cm}^2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot H}{2} &= 12 \\ 5H &= 24 \\ H &= \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

Portanto,  $h = \frac{3}{4}H = \frac{3}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{18}{5}$  cm. Resposta D.

17. (Extraído da OBM 2009) Trace os segmentos  $AD$  e  $AF$ . Como  $BD = DF = FC$ , temos

$$[ABD] = [ADF] = [AFC] = \frac{252}{3}.$$

Além disso, como  $E$  é ponto médio de  $AB$ , obtemos:

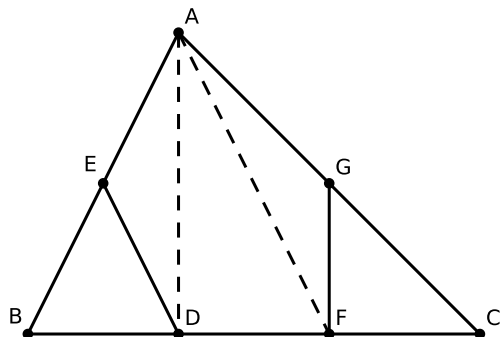
$$[BDE] = \frac{[ABD]}{2} = \frac{252}{6}$$



Analogamente, como  $G$  é ponto médio de  $AC$ ,  $[GFC] = \frac{252}{6}$ . Portanto,

$$[AEDFG] = [ABC] - [BDE] - [GFC] = \frac{2 \cdot 252}{3} = 168.$$

Resposta A.



**18.** (Extraído da OBM 2014) A razão  $EG/GD$  pode ser calculada através das razões de áreas:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EGB]}{[GDB]} = \frac{[EFG]}{[FDG]} = \frac{[EGB] + [EFG]}{[GDB] + [FDG]} = \frac{[EFB]}{[FDB]}.$$

Além disso, temos:

$$\frac{[EFB]}{[ABC]} = \frac{[EFB]}{[CFB]} \cdot \frac{[CFB]}{[ABC]} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Analogamente,

$$\frac{[FBD]}{[ABC]} = \frac{1}{9}$$

Portanto

$$\frac{EG}{GD} = \frac{[EFB]}{[ABC]} \cdot \frac{[ABC]}{[FDB]} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4.$$