Módulo Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides

Volumes e o Princípio de Cavalieri.

3° **ano/E.M.**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Volumes e o Princípio de Cavalieri.
Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a área total, o volume e a diagonal de um cubo cuja medida da aresta é $3cm$.

Exercício 2. Determine a medida da aresta de um cubo que tem $64cm^3$ de volume.

Exercício 3. Determine o volume de um cubo que tem diagonal medindo $3cm$.

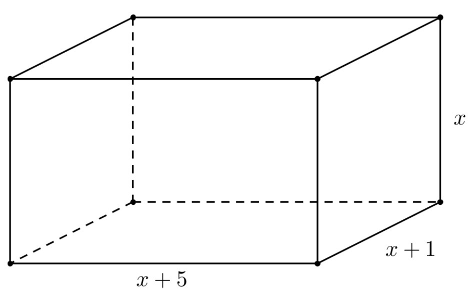
Exercício 4. Determine a área total de um cubo cujo volume é $27cm^3$.

Exercício 5. Determine o volume de um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são $2cm$ x $3cm$ x $4cm$.

Exercício 6. Se um paralelepípedo reto retângulo possui $10cm$ de comprimento, $5cm$ de largura e $200cm^3$ de volume, determine sua altura.

Exercício 7. Determine a área total de um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são $5cm$, $6cm$ e $8cm$.

Exercício 8. Na figura, temos um paralelepípedo reto retângulo.



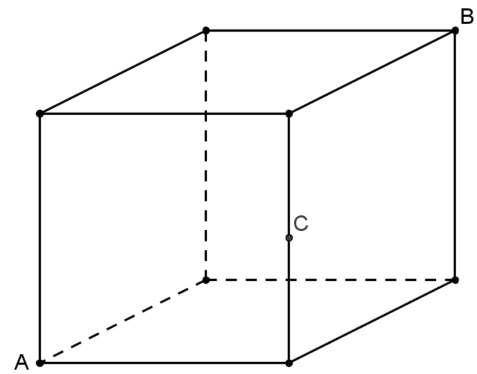
Determine as expressões que determinam volume, área total e diagonal.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Um recipiente cúbico tem capacidade para 8000 litros. Qual a medida de sua aresta em centímetros?

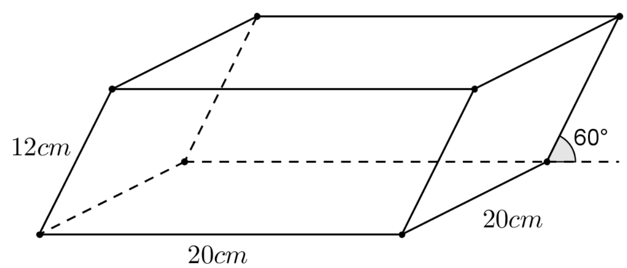
Exercício 10. Determine a aresta de um cubo cujo volume é oito vezes o volume de um cubo que tem aresta medindo $2cm$.

Exercício 11. No cubo da figura abaixo, cuja aresta mede $30cm$, estão uma formiga e uma abelha no ponto A. As duas partem na direção do ponto B, sendo que a abelha voa em uma linha reta e a formiga vai andando pela superfície passando antes pelo ponto C que é ponto médio da aresta. Qual a distância percorrida pela abelha e pela formiga?

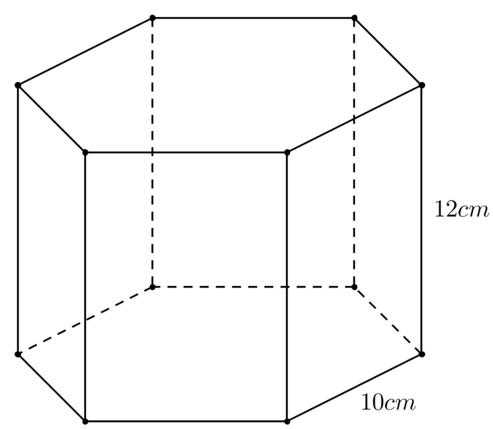


Exercício 12. Uma lata de tinta tem formato de paralelepípedo reto retângulo de dimensões $30cm$ x $42cm$ x $50cm$. Qual a sua capacidade em litros?

Exercício 13. Determine o volume do paralelepípedo oblíquo de base quadrada da figura abaixo, sabendo que duas de suas faces estão contidas em planos perpendiculares ao plano que contém a base.



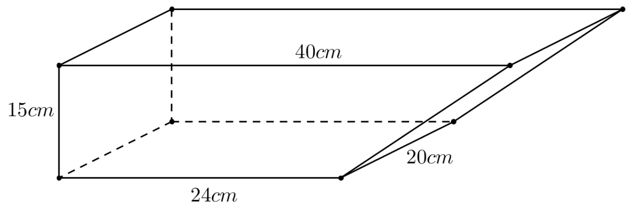
Exercício 14. Determine a área total e o volume do prisma regular, de base hexagonal, da figura abaixo.



Exercício 15. Determine o volume de um prisma reto de $12cm$ de altura e que tem como base um triângulo retângulo de catetos medindo $3cm$ e $4cm$.

Exercício 16. Um prisma reto é montado a partir de 9 palitos de $10cm$ de comprimento cada. Determine seu volume.

Exercício 17. Determine a capacidade do aquário representado na figura abaixo.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 18. Um paralelepípedo reto retângulo tem suas dimensões formando uma progressão aritmética de razão $4cm$. Sabendo que seu volume é $840cm^3$, determine suas dimensões.

Exercício 19. Determine a medida da aresta de um cubo, sabendo que essa medida, sua área total e seu volume formam, nessa ordem, uma progressão aritmética crescente.

Exercício 20. Qual a área compreendida entre as parábolas $x^2 - 4x + 7$ e $x^2 + 2x - 4$ e delimitada pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Respostas e Soluções.

1. A área total é $A_t = 6 \cdot 3^2 = 54cm^2$, o volume é $V = 3^3 = 27cm^3$ e a diagonal é $d = 3\sqrt{3}cm$.

2. Se o volume é $64cm^3$, então $a^3 = 64$, segue que a medida da aresta é $a = 4cm$.

3. Se a diagonal mede $3cm$, então a aresta mede $a = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}cm$. Temos então que o volume é $V = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}cm$.

4. Se o volume é $27cm^3$, então a aresta mede $a = \sqrt[3]{27} = 3cm$. Temos então que sua área total é $A_t = 6 \cdot 3^2 = 54cm^2$.

5. $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24cm^3$.

6. Seja h a medida da sua altura, temos que $10 \cdot 5 \cdot h = 200$, segue que sua altura mede $4cm$.

7.

$$\begin{aligned} A_t &= 2(5\cdot 6 + 5\cdot 8 + 6\cdot 8)\\ &= 2\cdot(30+40+48)\\ &= 236cm^2. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} V &= (x+5)(x+1)x\\ &= x^3+6x^2+5x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t &= 2[(x+5)(x+1)+(x+5)x+(x+1)x]\\ &= 2(x^2+6x+5+x^2+5x+x^2+x)\\ &= 6x^2+24x+10. \end{aligned}$$

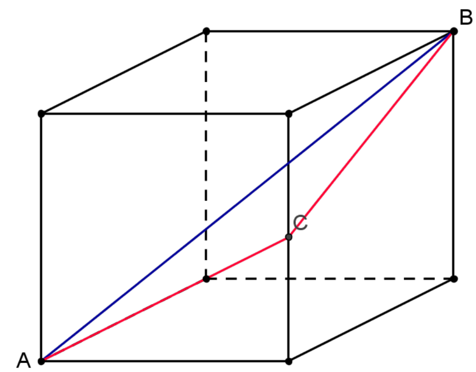
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x+5)^2+(x+1)^2+x^2}\\ &= \sqrt{x^2+10x+25+x^2+2x+1+x^2}\\ &= \sqrt{3x^2+12x+26}. \end{aligned}$$

9. Se $V = 8000\ell = 8m^3$, então sua aresta mede $2m$, ou seja, $200cm$.

10.

$$\begin{aligned} V_1 &= 8V_2\\ a_1^3 &= 8\cdot 2^3\\ a_1^3 &= 64\\ a_1 &= 4cm. \end{aligned}$$

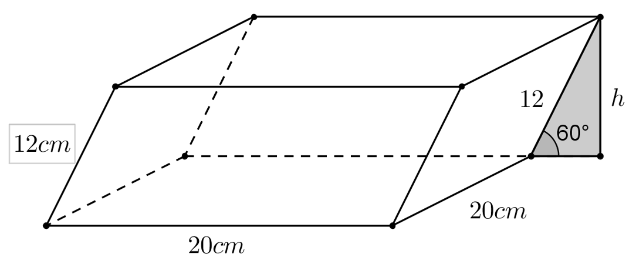
11. O trajeto da abelha é a medida da diagonal do cubo, ou seja, $30\sqrt{3}cm$. Para calcular a distância percorrida pela formiga, vamos calcular a medida de $\overline{AC}$. Como C é ponto médio, temos $AC^2 = 30^2 + 15^2$, segue que $AC = 15\sqrt{5}cm$. Como $AC = CB$, a distância percorrida pela formiga é $2 \cdot 15\sqrt{5} = 30\sqrt{5}cm$.



12.

$$\begin{aligned} V &= 30cm\cdot 42cm\cdot 50cm\\ V &= 3dm\cdot 4,2dm\cdot 5dm\\ V &= 63dm^3\\ V &= 63\ell. \end{aligned}$$

13. Para determinarmos a altura h, basta construirmos um triângulo retângulo na figura.



Temos agora que $h = 12 \operatorname{sen} 60^\circ = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm$. O volume então será $V = 20 \cdot 20 \cdot 6\sqrt{3} = 2400\sqrt{3}cm^3$.

14. Como a base é um hexágono regular, temos $A_b = 6 \cdot \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}cm^2$. Para a área lateral, temos 6 retângulos, ou seja, $A_l = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 720cm^2$. Assim, a área total é $A_t = 2 \cdot 150\sqrt{3} + 720 = (300\sqrt{3} + 720)cm^2$. Para o volume, temos $V = 150\sqrt{3} \cdot 12 = 1800\sqrt{3}cm^3$.

15. Se $A_b = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6cm^2$, então $V = 6 \cdot 12 = 72cm^3$.

16. Se são 9 palitos, devemos ter um prisma triangular regular, pois os palitos são do mesmo tamanho. Assim, o volume é $V = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 250\sqrt{3}cm^3$.

17. Como se trata de um prisma cuja base é um trapézio, seu volume é $V = \dfrac{(40+24)15}{2} \cdot 20 = 9600cm^3 = 9,6dm^3 = 9,6\ell$.

18. Vamos tomar as dimensões do paralelepípedo como sendo $(a-4)$, a e $(a+4)$, já que estão em PA de razão 4. Como o volume é $840cm^3$, temos:

$$\begin{aligned}(a-4)\cdot a\cdot(a+4) &= 840\\ (a-4)\cdot a\cdot(a+4) &= 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\\ (a-4)\cdot a\cdot(a+4) &= 6\cdot 10\cdot 14.\end{aligned}$$

Portanto suas dimensões são $6cm$, $10cm$ e $14cm$.

19. Sendo a a medida da aresta, temos a PA $(a, 6a^2, a^3)$, ou seja,

$$\begin{aligned}6a^2 &= \frac{a+a^3}{2}\\ 12a^2 &= a+a^3\\ a^3-12a^2+a &= 0\\ a(a^2-12a+1) &= 0.\end{aligned}$$

Temos então que a só pode ser $6+\sqrt{35}$, já que a PA deve ser crescente.

20. Para cada $x \in [0,1]$ o segmento de reta compreendido entre as duas parábolas constituido pelo conjunto de pontos de abscissa x mede $x^2-4x+7-(x^2+2x-4) = 11-6x$. Pelo Princípio de Cavalieri, a área procurada é a do trapézio determinado pela reta $y = 11-6x$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$. Como as bases medem $11-6\cdot 0 = 11$ e $11-6\cdot 1 = 5$, sua área é $\dfrac{11+5}{2}\cdot 1 = 8$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com