Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 2

Resolução de Exercícios - Parte A

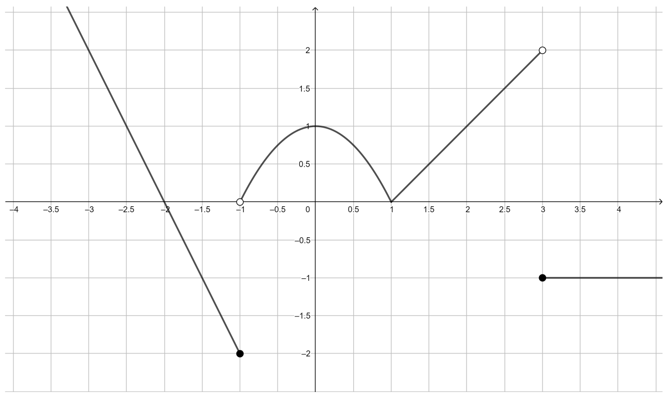
Introdução ao Cálculo

Material elaborado por Lorena Bulhosa

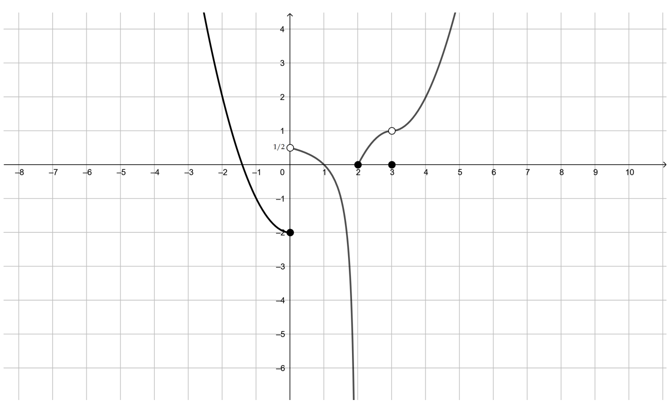
Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 2
Resolução de Exercícios - Parte A

1 Exercícios Introdutórios

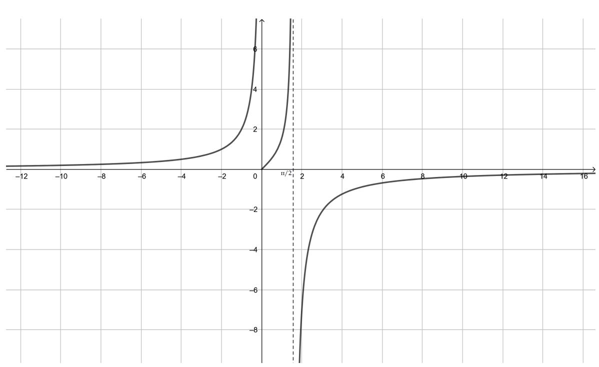
Exercício 1. Observe o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esboçado na figura a seguir. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.



Exercício 2. Observe o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esboçado na figura a seguir. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.



Exercício 3. Observe o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2\} \to \mathbb{R}$ esboçado na figura a seguir. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$.



Exercício 4. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{x+3}{(2x-3)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x}{|x+2|}$

d) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2-x}{(x+4)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-1}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+2x+3}{|x+1|}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-x}{2x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x+4}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+7x+1}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-x+4}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3}$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 6. Esboce o gráfico da função f a seguir e responda às perguntas abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1, & x<1 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x-1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$$

a) Calcule $f(1)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Calcule $f(2)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

c) Identifique todos os valores de a onde existe o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-4}{1-x}, & x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-1}, & x>1. \end{cases}$$

Determine o $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 8. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2-2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{2x^2-5x-3}{2x+1}$

Respostas e Soluções.

1. Quando x tende a -1 por valores de x menores que -1, o gráfico da função é uma reta e se aproxima do ponto $(x, f(x)) = (-1, -2)$, logo $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2$. Para $x \to -1^+$, podemos nos restringir aos valores de x pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$, onde o gráfico da função é uma curva. À medida que nos aproximamos de $x = -1$ por valores nesse intervalo (maiores que 1), o gráfico da função se aproxima do ponto $(x, f(x)) = (-1, 0)$. Logo, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$.

Quando $x \to 1^-$ e quando $x \to 1^+$ o ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(1, 0)$, de forma que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0.$$

Portanto, o limite quando x tende a 1 existe e também vale 0.

Para $x \to 3^-$, podemos nos restringir ao intervalo $(1, 3)$, onde o gráfico de f é uma reta e o ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(3, 2)$. Assim, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$. Por outro lado, quando $x \to 3^+$, o gráfico de f é uma reta horizontal e o ponto $(x, f(x)) = (x, -1)$. Logo, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$.

2. Para valores de x menores que 0 o gráfico de f é uma curva. O ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(0, -2)$ quando $x \to 0^-$, logo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$. Por outro lado, quando $x \to 2^+$, o ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(0, 1/2)$, logo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$.

Quando x tende a 2 por valores menores que 2, o gráfico de f é uma curva que vai se aproximando da reta $x = 2$. À medida que x tende a 2, os valores de $f(x)$ vão diminuindo cada vez mais. Assim, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Para $x \to 2^+$, podemos nos concentrar no intervalo $(2, 3)$, onde o gráfico de f é uma curva. Nesse intervalo, à medida que x se aproxima de 2, o ponto $(x, f(x))$ se aproxima do ponto $(2, 0)$. Logo, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$.

Note que no intervalo $(2, 3)$, para $x \to 3^-$, o valor de $f(x)$ tende a 1. No intervalo $(3, +\infty)$, para $x \to 3^+$, o valor de $f(x)$ também tende a 1. Assim,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1.$$

Logo, existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ e seu valor também é 1 (embora o valor da função no ponto $x = 3$ seja $f(3) = 0$).

3. No intervalo $(-\infty, 0)$, à medida que x se aproxima de 0, o gráfico de f é uma curva que vai *subindo* e a imagem $f(x)$ vai assumindo valores cada vez maiores. Logo, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Por outro lado, quando $x \to 0^+$, nos restringimos ao intervalo $(0, \pi/2)$ para perceber que o ponto $(x, f(x))$ vai se aproximando do ponto $(0, 0)$. Logo, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Como os limites laterais são diferentes, o $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

Nos restringindo ao intervalo $(0, \pi/2)$, vemos que à medida que $x \to \pi/2^-$, o gráfico de f vai *subindo* e os valores de $f(x)$ vão aumentando cada vez mais. Por outro lado, nos restringindo ao intervalo $(\pi/2, +\infty)$, à medida que $x \to \pi/2^+$, o gráfico de f vai *descendo* e os valores de $f(x)$ vão diminuindo cada vez mais. Assim,

$$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = -\infty.$$

Como os limites laterais são diferentes, o $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$ não existe.

4. Nesta questão note que quando tendemos x ao valor pedido, os denominadores tendem a zero por valores positivos, enquanto os numeradores tendem a um valor real diferente de zero. Assim, o limite é $+$ ou $-$ infinito, a depender do sinal do numerador. Por exemplo, no ítem (a) o numerador tende a -1, enquanto o denominador tende a zero por valores positivos, logo o limite é $-\infty$. a)$-\infty$ b)$+\infty$ c)$-\infty$ d)$+\infty$ e)$-\infty$ f)$+\infty$

5. Nesta questão devemos ter atenção ao sinal do numerador e do denominador em cada um dos ítens.

a)

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+1}{x+2} = +\infty \neq \lim_{x\to -2^+} \frac{x+1}{x+2} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x+2}$$

b)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1-x}{2x-6} = +\infty \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{1-x}{2x-6} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} \frac{1-x}{2x-6}$$

c)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x+4}{1-x} = +\infty \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{3x+4}{1-x} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} \frac{3x+4}{1-x}$$

d)

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2+7x+1}{x+1} = -\infty$$

e)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x+4}{x} = +\infty$$

f) Neste ítem, note que o expoente cúbico no denominador conserva o sinal da base. Assim, se x tende a 2 por valores menores que 2, $(2-x)$ tende a zero por valores positivos, assim como $(2-x)^3$. Por outro lado, se $x \to 2^+$, então $(2-x)^3 \to 0$ por valores negativos. Vejamos então os limites laterais:

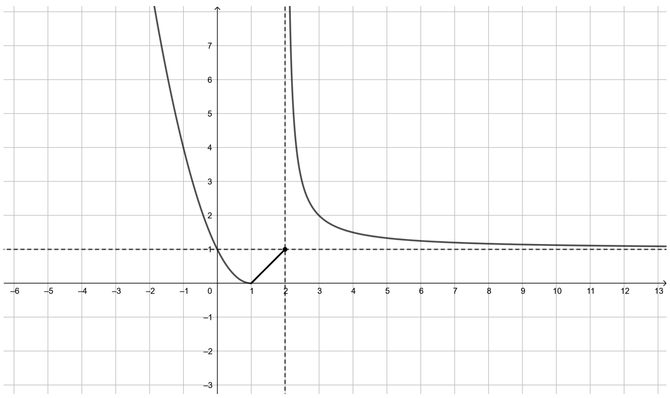
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3} = -\infty \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3} = +\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-5}{(2-x)^3}$$

6. Para fazer o gráfico da função vejamos sua definição em sentenças. A primeira e a segunda sentenças são gráficos de uma parábola e uma reta, respectivamente, as quais sabemos como esboçar. A última sentença podemos reescrever como

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Para esboçar a parte do gráfico dado pela terceira sentença basta fazermos duas translações. De fato, conhecendo o gráfico de $f_1(x) = 1/x$, basta notar que obtemos o gráfico de $f_2(x) = 1/(x-2)$ deslocando o de f_1 duas unidades para a direita. Em seguida, deslocando o gráfico de f_2 uma unidade para cima obtemos o gráfico de $f(x) = 1 + 1/(x-2)$.



a) Temos direto da segunda sentença na definição da função que $f(1) = 1 - 1 = 0$. Observando o gráfico, é claro que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, já que os limites laterais coincidem.

b) Mais uma vez da segunda sentença na definição da função, $f(2) = 2 - 1 = 1$. Observando o gráfico da função, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

c) Analisando o gráfico é fácil notar que o único valor de a para o qual os limites laterais não coincidem é $a = 2$. Logo, o limite existe para todos os valores reais diferentes de 2, isto é os valores de a são dados pelo conjunto $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

7. Da primeira sentença na definição da função, vamos calcular o valor do limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 - 4}{1 - x} = -\infty.$$

Da mesma forma, o limite pela direita é

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe o $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
Apenas a nível de ilustração, abaixo está o gráfico da função f.

8. Nos ítens a seguir observe que se $x \to a$, ao substituir o valor de a na fração, encontramos o quociente não definido $0/0$. Então devemos descobrir qual o valor desse quociente para valores diferentes de a. Sabemos que $x = a$ são zeros das funções no numerador e no denominador.

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = -\frac{1}{2}.$$

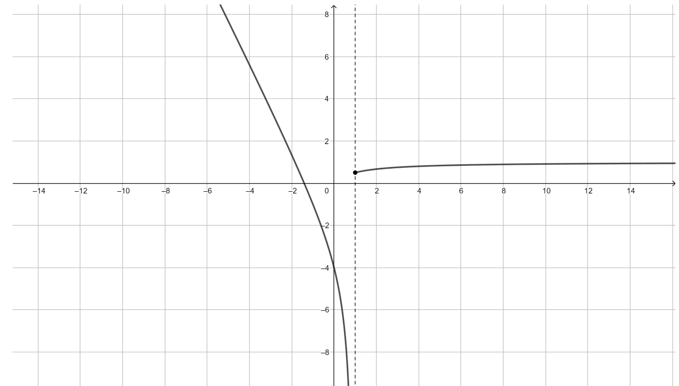


Figura 1: Gráfico da questão 7.

b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x+2} = -1.$$

d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

e)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 5 = 7.$$

f)

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x + 1} = \lim_{x\to -1/2} \frac{(2x+1)(x-3)}{2x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1/2} x - 3 = -\frac{7}{2}.$$

Material elaborado por Lorena Bulhosa