Função Logarítmica

Praticando as Propriedades

1° **ano E.M.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Função Logarítmica
Praticando as Propriedades

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o valor dos logaritmos abaixo, sendo a e n números reais positivos e $a \neq 1$.

a) $\log_a 1$.

b) $\log_a a$.

c) $\log_a a^n$.

d) $a^{\log_a n}$.

Exercício 2. Uma outra maneira de escrever $\log_2 N = 5$, sendo N um número real positivo, é:

a) $2^N = 5$.

b) $N^5 = 2$.

c) $5^2 = N$.

d) $2^5 = N$.

e) $N^2 = 5$.

Exercício 3. Sendo a e b números reais positivos e $b \neq 1$, então $\dfrac{\log a}{\log b}$ é igual a:

a) $\log a - \log b$.

b) $\log(ab)$.

c) $\log_a b$.

d) $\log_b a$.

e) $\dfrac{\log b}{\log a}$.

Exercício 4. O valor de $\log 30 - \log 3$ é:

a) $\log 27$.

b) 27.

c) 10.

d) 2.

e) 1.

Exercício 5. Calcule o valor das expressões:

a) $\log 100 + \log_6 6^6$.

b) $\log 5 \cdot \log_5 50 \cdot \log_{50} 10$.

Exercício 6. Determine o valor de x nas equações abaixo.

a) $\log_2 x^2 = \log_2 16$.

b) $\log_3 8^x = \log_3 64$.

c) $\log x \cdot \log_{(x^2-2)} 10 = 1$.

Exercício 7. $\log_{a^2} N^2$, sendo a e N números reais positivos e $a \neq 1$, é igual a:

a) $\log_a N$.

b) $\log_N a$.

c) $2\log_a N$.

d) $\log_a \sqrt{N}$.

e) $\log_{\sqrt{a}} N$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Determine o valor da expressão:

$$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot ... \cdot \log_{10} 9.$$

Exercício 9. Determine $\log 90$, sendo $\log 3 = 0,48$.

Exercício 10. Se $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

a) $\dfrac{3}{4}$.

b) 6.

c) 28.

d) 50.

e) 66.

Exercício 11. Considere $a = \log\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ e $b = \log\left(x + \dfrac{1}{x} - 1\right)$, com $x > 1$. Determine $\log\left(x^2 - x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Exercício 12. Sejam x, y e z números reais positivos e diferentes de 1. Se $\log_x y = 3$ e $\log_y z = 2$, determine $\log_z x$.

Exercício 13. Determine $\log 0,36$, sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Exercício 14. Calcule a soma das raízes da equação $(\log x)^2 - \log x^3 = 0$.

Exercício 15. A solução da equação na variável real x, $\log_x(x + 6) = 2$, é um número:

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere $0{,}3$ como aproximação para $\log_{10} 2$. Qual é o tempo necessáiro, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial:

a) 27.

b) 36.

c) 50.

d) 54.

e) 100.

Exercício 17. Em 2011, um terremoto de magnitude $9{,}0$ na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude $7{,}0$ na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_o}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_o uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$.

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$.

c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$.

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$.

e) $E_1 = \dfrac{9}{7} \cdot E_2$.

Exercício 18. Sabendo que $2^k = 5$, então $\log_{50} 4$ em função de k é igual a:

a) $\dfrac{2}{1+2k}$.

b) $\dfrac{2}{2+k}$.

c) $\dfrac{2}{1+k}$.

d) $\dfrac{1}{1+2k}$.

e) $\dfrac{1}{1+k}$.

Exercício 19. O valor da soma $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + ... + \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right)$ é:

a) 0.

b) -1.

c) -2.

d) 2.

e) 3.

Exercício 20. Escrevendo o número 99999999 em uma calculadora, após quantas vezes apertadas a tecla "log"aparecerá a mensagem de erro?

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) $\log_a 1 = 0$.

b) $\log_a a = 1$.

c) $\log_a a^n = n$.

d) $a^{\log_a n} = n$.

2. D.

3. D.

4. $\log 30 - \log 3 = \log\left(\frac{30}{3}\right) = \log 10 = 1$. Resposta E.

5.

a) $\log 100 + \log_6 6^6 = 2 + 6 = 8$.

b) $\log 5 \cdot \log_5 50 \cdot \log_{50} 10 = \log 5 \cdot \frac{\log 50}{\log 5} \cdot \frac{\log 10}{\log 50} = 1$.

6.

a)

$$\begin{aligned}\log_2 x^2 &= \log_2 16\\ x^2 &= 16\\ x &= \pm 4.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\log_3 8^x &= \log_3 64\\ 8^x &= 64\\ x &= 2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\log x \cdot \log_{(x^2-2)} 10 &= 1\\ \log x \cdot \frac{1}{\log(x^2-2)} &= 1\\ \log_{(x^2-2)} x &= 1\\ x &= x^2 - 2\\ x^2 - x + 2 &= 0\\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, não existe x real.

7. Supondo $\log_{a^2} N^2 = x$, temos que $\left(a^2\right)^x = N^2$, que é o mesmo que $a^x = N$, já que a e N são positivos. Temos então $x = \log_a N$. Resposta A.

8. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}E &= \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9\\ &= \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \ldots \cdot \frac{\log 9}{\log 10}\\ &= \frac{\log 2}{\log 10}\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

9. Vamos chamar $\log 90$ de y. Assim, temos:

$$\begin{aligned}y &= \log 90\\ &= \log\left(3^2 \cdot 10\right)\\ &= \log 3^2 + \log 10\\ &= 2\log 3 + \log 10\\ &= 2 \cdot 0,48 + 1\\ &= 0,96 + 1\\ &= 1,96.\end{aligned}$$

10. (Extraído da PUC Rio - 2015) Se $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, então $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$. Assim, $\sqrt[3]{8} + 8^2 = 2 + 64 = 66$. Resposta E.

11. (Extraído da Vídeo Aula)
Percebamos que $\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) = x^2 + 1 - x - 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Temos então:

$$\begin{aligned}\log\left(x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) &=\\ \log\left[\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\right] &=\\ \log\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) &= a + b.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\log_z x &=\\ \frac{\log_y x}{\log_y z} &=\\ \frac{1}{\log_x y \cdot \log_y z} &=\\ \frac{1}{3 \cdot 2} &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\log 0,36 &=\\ \log\left(\frac{36}{100}\right) &=\\ \log 36 - \log 100 &=\\ \log\left(3^2 \cdot 2^2\right) - 2 &=\\ 2\log 3 + 2\log 2 - 2 &=\\ 0,96 + 0,6 - 2 &= -0,44.\end{aligned}$$

14. (Extraído da Vídeo Aula) Se $(\log x)^2 - 3\log x = 0$, então $(\log x) \cdot (\log x - 3) = 0$, ou seja, $\log x = 0$ ou $\log x - 3 = 0$, segue que $x = 1$ ou $x = 1000$. Portanto, a soma das raízes da equação é $1 + 1000 = 1001$.

15. (Extraído da Unicamp - 2016) Temos:

$$\begin{aligned}
\log_x(x+6) &= 2\\
x+6 &= x^2\\
x^2-x-6 &= 0\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

Pela condição de existência, a única solução é $x=3$. Resposta A.

16. (Extraído do ENEM - 2013) Se a meia vida é 30 anos, então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A &= A\cdot(2,7)^{kt}\\
\frac{1}{2} &= (2,7)^{30k}\\
2,7^k &= \sqrt[30]{\left(\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Agora, para redução à 10%, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10}\cdot A &= A\cdot(2,7)^{kt}\\
\frac{1}{10} &= (2,7)^{kt}\\
\log\left(\frac{1}{10}\right) &= \log(2,7)^{kt}\\
-1 &= t\log(2,7)^k\\
-1 &= t\log\sqrt[30]{\left(\frac{1}{2}\right)}\\
-1 &= -\frac{t}{30}\log 2\\
30 &= t\cdot 0,3\\
t &= 100.
\end{aligned}$$

Resposta E.

17. (Extraído do ENEM - 2016) Para $M=9$, temos $E_1 = E_o\cdot 10^{\frac{27}{2}}$ e para $M=7$, temos $E_2 = E_o\cdot 10^{\frac{21}{2}}$. Dividindo as equações, temos $\dfrac{E_1}{E_2} = 10^3$. Resposta C.

18. (Extraído do IFMA - 2016) Se $2^k=5$, então:

$$\begin{aligned}
\log_{50}2^k &= \log_{50}5\\
k\log_{50}2 &= \log_{50}5\\
2k\log_{50}2 &= 2\log_{50}5\\
k\log_{50}4 &= 2\log_{50}5\\
k\log_{50}4 &= \frac{2}{\log_5 50}\\
k\log_{50}4 &= \frac{2}{\log_5 2+\log_5 25}\\
k\log_{50}4 &= \frac{2}{\frac{1}{k}+2}\\
\log_{50}4 &= \frac{1}{k}\cdot\frac{2}{\frac{1}{k}+2}\\
\log_{50}4 &= \frac{2}{1+2k}.
\end{aligned}$$

Resposta A.

19. (Extraído da UFC-CE)

$$\begin{aligned}
\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)+\log_{10}\left(\frac{3}{4}\right)+...+\log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) &=\\
\log 1-\log 2+\log 2-\log 3+...+\log 99-\log 100 &=\\
\log 1-\log 100 &=\\
0-2 &=\\
-2.
\end{aligned}$$

Resposta C.

20. Seja $K = 99999999$, temos:

$$\begin{array}{ccccc}
10^7 & < & K & < & 10^8\\
\log 10^7 & < & \log K & < & \log 10^8\\
7 & < & \log K & < & 8\\
\log 7 & < & \log(\log K) & < & \log 8\\
\log 1 & < & \log(\log K) & < & \log 10\\
0 & < & \log(\log K) & < & 1\\
 & & \log[\log(\log K)] & < & \log 1\\
 & & \log[\log(\log K)] & < & 0.
\end{array}$$

Após apertarmos três vezes a tecla "log", com 99999999 no visor, encontramos um resultado negativo, o que significa que a próxima vez que apertarmos, aparecerá a mensagem de erro, ou seja, quatro vezes. Resposta B.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com