Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS

Problemas dos Capítulos 5 e 6

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Dezembro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Problemas do Capítulo 5

Exercício 1. *Uma companhia tem 67 empregados, dos quais 47 falam inglês, 35 falam espanhol e 23 falam as duas línguas.*

(a) Quantos não falam inglês nem espanhol?

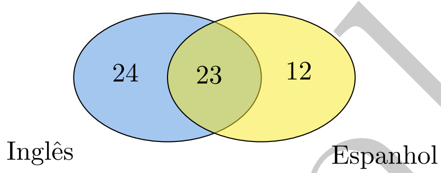
(b) Suponha que, além disso, 20 empregados falem francês, 12 falem francês e inglês, 11 falem francês e espanhol, e 5 falem todas as três línguas. Quantos empregados não falam nenhuma das três línguas?

Esta é uma típica questão de conjuntos, e para resolvê-la introduziremos a representação de conjuntos através do Diagrama de Venn.

Solução.

(a) Desenhe duas elipses que se intersectam. Cada uma irá representar o conjunto dos falantes de cada língua. Assim, a região de interseção irá representar o conjunto das pessoas que falam as duas línguas. Nossa estratégia será preencher as regiões do diagrama com as quantidade de pessoas que estão em cada subconjunto.

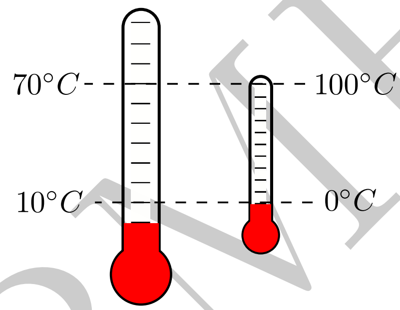
Existem $47 - 23 = 24$ empregados que falam inglês, mas não espanhol, e $35 - 23 = 12$ que falam espanhol, mas não inglês. Logo $24 + 12 + 23 = 59$ falam pelo menos uma entre as duas línguas, enquanto $67 - 59 = 8$ não sabem nenhuma das duas.



(b) Vamos primeiro encontrar o número de empregados que falam pelo menos uma das três línguas. Podemos começar somando os números de empregados que falam inglês, espanhol e francês. O resultado é $47 + 35 + 20 = 102$. Contamos todos os que falam uma dessas línguas, mas os que falam duas delas foram contados duas vezes e os que falam todas as três foram contados três vezes. Vamos ajustar o total subtraindo o número dos que falam inglês e francês, dos que falam francês e espanhol, e dos que falam inglês e espanhol. O resultado é $102-23-12-11 = 56$. Mas os empregados que falam todas as três línguas foram subtraídos três vezes depois de terem sido somados, inicialmente, três vezes, de modo que eles não aparecem nessa contagem. Precisamos, portanto, acrescentá-los, de modo que o número de empregados que falam pelo menos uma das três línguas é $56 + 5 = 61$. Então o número de empregados que não falam nenhuma das três línguas é $67 - 61 = 6$.

□

Exemplo 2. *Dois termômetros de mercúrio de tamanhos distintos estão suspensos em uma parede. Apesar de marcarem a mesma temperatura, as alturas de suas marcações não são as mesmas. A marcação de* 10°C *do termômetro da esquerda corresponde à marcação de* 0°C *no termômetro da direita, enquanto que a marcação de* 70°C *do termômetro da esquerda corresponde à marcação de* 100°C *no termômetro da direita.*



Em que temperatura, as alturas do mercúrio nos dois termômetros serão as mesmas?

Solução. Seja x a temperatura na qual os dois termômetros terão suas marcações na mesma altura. Veja que nessa temperatura, a razão entre as distância de x até zero e de 100 até x no segundo termômetros será igual à razão entre as distâncias de x até 10 e de 70 até x no primeiro termômetro. Assim,

$$\frac{x-0}{100-x} = \frac{x-10}{70-x}.$$

Multiplicando em cruz, temos:

$$70x - x^2 = 100x - x^2 - 1000 + 10x$$

Cancelando o termo (x^2) que aparece dos dois lados da equação, e reorganizando os termos restantes, temos:

$$1000 = 40x \Rightarrow x = 25.$$

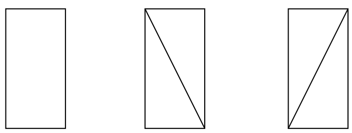
Logo, em 25°C as alturas dos marcadores nos dois termômetros serão as mesmas. □

Exercício 3. *Escolha* 26 *números do conjunto* $\{1, 2, ..., 50\}$. *Mostre que existem dois, dentre os números escolhidos, em que um deles é divisível pelo outro.*

Solução. Vamos considerar, primeiro, o maior divisor impar de cada um dos números de 1 a 50. Por exemplo, o maior divisor impar de 16 é 1 , o maior divisor ímpar de 20 é 5 e o maior divisor ímpar de 49 é 49. Os divisores ímpares possíveis dos 50 primeiros inteiros positivos são $1, 3, \ldots, 49$ e há 25 deles. Como escolhemos 26 números de 1 a 50 , pelo menos dois deles têm o mesmo maior divisor ímpar. Então um desses dois números será divisível pelo outro. De fato, sejam a e b os dois números que possuem esse mesmo maior divisor ímpar (que denotaremos por Q). Então $a = 2^x Q$ e $b = 2^y Q$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x < y$. Nesse caso, a é um divisor de b. $\square$

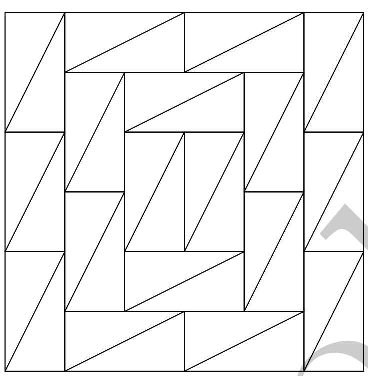
2 Problemas do Capítulo 6

Exercício 4. *Em um conjunto tendo muitos retângulos* 2×1 *do mesmo tamanho, alguns estão em branco e outros têm uma diagonal, como na figura abaixo.*



Serão escolhidos dezoito retângulos que serão montados em um quadrado 6×6 *de modo que duas diagonais nos retângulos nunca se encontrem. Qual é o menor número de retângulos em branco necessários para isso?*

Solução. A figura a seguir mostra que é possível não usa nenhum retângulo branco.



$\square$

Exercício 5. *Quantas sequências de 15 algarismos iguais a 0 ou iguais a 1 existem de modo que não existam dois algarismos iguais a 0 consecutivos?*

Solução. Vamos primeiro tentar resolver o problema quando o número de algarismos na sequência for pequeno. Chamamos o número de algarismos na sequência de comprimento da sequência. Por exemplo, 0 e 1 são as únicas sequências de comprimento 1. Existem duas delas e ambas satisfazem a condição do problema. As sequências de comprimento 2 que satisfazem à condição do problema são 01,10 e 11, e há três delas.

Vamos analisar como pode ser construída uma sequência de comprimento n sem algarismos iguais a 0 adjacentes. Se a última posição na sequência tem um algarismo igual a 1, então, nas $n-1$ posições anteriores, pode haver qualquer sequência sem algarismos iguais a 0 adjacentes. Se a última posição na sequência tem um algarismo igual a 0 , então tem que haver um algarismo igual a 1 na posição anterior e pode haver qualquer sequência sem algarismos iguais a 0 adjacentes nas $n-2$ posições anteriores. Portanto, qualquer sequência de comprimento n sem algarismos iguais a 0 adjacentes resulta da inclusão de um algarismo igual a 1 no final de uma sequência de comprimento $n-1$ sem algarismos iguais a 0 adjacentes ou da inclusão de 10 no final de uma sequência algarismos iguais a 0 adjacentes ou da inclusão de 10 no final d comprimento $n-2$ sem algarismos iguais a 0 adjacentes de comprimento $n-2$ sem algarismos iguais a 0 adjacentes. Agora podemos, sistematicamente, encontrar o número de sequências sem Agora podemos, sistematicamente, encontrar o número de cadelas sendo o número de tais sequências de comprimento menor. Por exemplo, para $n = 3$, existem $2 + 3 = 5$ sequências de comprimento três. A razão disso é que podemos incluir 10 ao final das duas sequências de comprimento 1 , obtendo 010 e 110 , e podemos incluir 1 ao final das três sequências de comprimento 2 , obtendo 011 , 101 e 111. Analogamente, há $3 + 5 = 8$ dessas sequências com comprimento 4 , e assim por diante. A sequência resultante, onde cada número depois do segundo é a soma dos dois números precedentes, é conhecida como uma sequência de Fibonacci. Para este problema, a sequência é $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ e você pode estendê-la para encontrar a resposta para sequências de comprimento 15:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$$

Portanto, há 1597 dessas sequências. $\square$

Exercício 6. *Um triângulo equilátero pode ser coberto por outros dois triângulos equiláteros menores?*

Solução. A resposta é não. O segmento mais longo que pode ser coberto por um triângulo equilátero não pode ser maior do que o lado do triângulo. Temos um triângulo equilátero grande e dois menores. Um dos dois menores não pode cobrir dois vértices do maior. Portanto, dois triângulos menores podem cobrir, no máximo, dois vértices do maior, de modo que um vértice permanecerá descoberto. $\square$

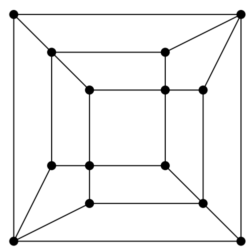
3 Problemas Extras

Exercício 7. *Em um grupo de* 50 *cientistas sabe-se que cada um deles conhece pelo menos* 25 *outros cientistas. Prove que podemos colocar quatro deles ao redor de uma mesa de forma que cada cientista esteja sentado ao lado de dois amigos*

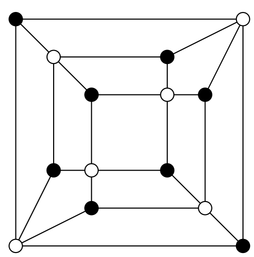
Solução. Considere dois cientistas que não se conhecem. Denote-os por P e Q. Dentre as 48 pessoas restantes, pelo menos 25 são amigos de P e pelo menos 25 são amigos de Q. Isso significa que P e Q possuem pelo menos dois amigos em comum. Sejam A e B esses dois amigos em comum. Note que P, A, Q e B podem ser colocados ao redor de um círculo (nessa ordem) de modo a cumprir com as condições do problema.

Se não existirem duas pessoas P e Q que não se conhecem, então todos são amigos entre si. Nesse caso, quaisquer quatro pessoas irão cumprir às condições solicitadas pelo enunciado. □

Exercício 8. *A figura abaixo representa as ligações rodoviárias entre 14 cidades. Existe um caminho passando por cada cidade exatamente uma vez?*



Solução. Pinte os pontos de preto ou branco de modo que pontos da mesma cor não estejam conectados. Uma forma de se fazer isso é a seguinte:



Se existisse um caminho que passa por cada cidade exatamente uma única vez, o número de pontos pretos e brancos deveria ter sua diferença (em termos absolutos) de no máximo uma unidade. Porém, temos 6 pontos brancos e 8 pretos. Logo, é impossível que tal caminho exista.

□

Exercício 9. *(Rússia 1997) Os números de 1 a 37 são escritos em uma reta de modo que todo número divide a soma dos anteriores. Se o primeiro número é 37 e o segundo é 1, qual o terceiro número?*

Solução. Sejam x e y o terceiro e o último número da sequência, respectivamente. De acordo com a propriedade, devemos ter que $y \mid S - y$, onde S é a soma de todos os número da sequência. Por outro, todos estes números são, em alguma ordem, os números de 1 a 37 cuja a soma é $S = 1 + 2 + \cdots + 37 = 37 \cdot 19$. Assim, $y \mid 37 \cdot 19$. Como, $y \neq 37$ e $y \neq 1$, pois estes correspondem aos dois primeiros termos, resta $y = 19$. Assim, sabendo que $x \mid 37 + 1 = 38$, e que $x \neq y$, o terceiro termo deve ser 2. □

Exercício 10. *(Torneio das Cidades 1991) Mostre que o produto*

$$(2^{1917}+1)(2^{1917}+2)(2^{1917}+3)\cdots(2^{1991}-1)$$

não pode ser um quadrado perfeito.

Solução. Veja que no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2^{1917}$ há um total de $1 + 2 + 4 + 8 \cdots + 2^{1916} = 2^{1917} - 1$ fatores 2. E que no produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2^{1991}$ há um total de $1 + 2 + 4 + 8 \cdots + 2^{1990} = 2^{1991} - 1$ fatores 2. Logo, no produto $(2^{1917} + 1)(2^{1917}+2)(2^{1917}+3)\cdots(2^{1991}-1)$ há $2^{1991} - 1 - 1991 - (2^{1917} - 1)$ fatores 2. Como esta quantidade é ímpar, o número que estamos analisando não pode ser um quadrado perfeito. □

Exercício 11. *Em um certo sistema de criptografia de texto, cada letra é substituída por um símbolo diferentes. Sabe que as quatro sequências de símbolos a seguir*

◯■□ ▲◯⊠ ■⊗△ △⊗▲

correspondem à codificação, por esse sistema, das palavras "CAL", "ECO", "LAR" e "REU", não necessariamente nessa ordem. Ou seja, não sabe-se inicialmente qual sequência corresponde a qual palavra.

Com base nessas informações, decodifique a sequência de símbolos a seguir:

□■⊗▲⊗■□▲▲◯⊠

Observando as posições em que cada letra aparece nas palavras "CAL","ECO", "LAR" e "REU", notamos que a letra A é a única que se repete duas vezes na posição do meio, o que só ocorre com o símbolo ⊗. Sabendo disso, também notamos que a letra L é a única que se repete à direita e à esquerda de A, o que só ocorre com o símbolo △. Portanto, sabendo que $A = \otimes$ e que $L = \triangle$, descobrimos que $C = \blacksquare$ e $R = \blacktriangle$ decodificando as palavras "CAL" e "LAR". Usando essas duas últimas informações, decodificamos "ECO" e "REU" para obter $E = \bigcirc$, $O = \square$ e $U = \boxtimes$.

Portanto, a expressão

□■⊗▲⊗■□▲▲◯⊠

é decodificada para

$$O\ C\ A\ R\ A\ C\ O\ R\ R\ E\ U$$

4 Sugestões aos Professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [3, 2]. Nestes, o professor poderá encontrar problemas separados em conjuntos que tratam sobre o mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela que comumente encontra-se nas aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a exporem suas ideias (mesmo que parcialmente incompletas ou inconsistente) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.

Observe que muitas das situações apresentadas nessa lista possuem diversas soluções ou podem ser modificados para gerar novas formas de exploração das ideias utilizadas na solução. Recomendamos que os professores utilizem essa estratégia para manter a turma motivada ao longo da aula.

Referências

[1] Sergey Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana*. IMPA, 2016.

[2] Dmitri Fomin, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*. IMPA, 2012.

[3] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória*. IMPA, 2018.