Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Regras de Divisibilidade

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de janeiro de 2021

Portal da Matemática OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, continuamos a apresentar exercícios variados, os quais envolvem conteúdos como operações aritméticas, fatoração e divisibilidade de números naturais.

Exemplo 1 (CMF). *Das afirmações abaixo sobre divisibilidade, é correto afirmar que:*

(*a*) *Todo número divisível por* 5 *é também divisível por* 10.

(*b*) *Todo número divisível por* 3 *é também divisível por* 9.

(*c*) *Todo número divisível por* 2 *e por* 3 *é também divisível por* 12.

(*d*) *O número* 1 *é divisível por qualquer número.*

(*e*) *Ao dividir* 0 *por qualquer número diferente de* 0 *o quociente é igual a* 0.

Solução.

- O número 15 é divisível por 5 e não é divisível por 10. Portanto a alternativa (a) é falsa.

- O número 6 é divisível por 3 e não é divisível por 9. Logo, a alternativa (b) também é falsa.

- O número 18 é divisível por 2 e por 3, mas não é divisível por 12. Assim, a alternativa (c) também é falsa.

- O número 1 só é divisível por ele mesmo. Desse modo, a alternativa (d) é falsa.

- Como $0 = n \cdot 0$, qualquer que seja o número natural n, temos que 0 é divisível por n com quociente igual a zero, quando n for diferente de 0. Portanto, a alternativa (e) é verdadeira.

□

Exemplo 2. *Qual é o número de dois algarismos que devemos colocar à direita do número* 356 *para formar um número de cinco algarismos divisível por* 2, 9 *e* 5*?*

Solução. Quando colocamos o número de dois algarismos xy à direita de 356, obtemos o número de cinco algarismos $n = 356xy$. Agora, analisemos as condições dadas no enunciado:

- Como n deve ser divisível por 2, concluímos que y é um algarismo par;
- Como n deve ser divisível por 5, concluímos que $y = 0$ ou $y = 5$.

As duas condições acima implicam $y = 0$. Além disso, n é divisível por 9. Daí, o critério de divisibilidade por 9 garante que $3 + 5 + 6 + x + 0 = 14 + x$ é divisível por 9. Logo, $x = 4$, ou seja, o número de dois algarismos procurado é 40. □

Exemplo 3 (ESA). *Se o número* $7x4$ *é divisível por* 18*, então o algarismo* x*:*

(*a*) *Não existe.*

(*b*) *Vale* 4*.*

(*c*) *Vale* 7*.*

(*d*) *Vale* 9*.*

(*e*) *Vale* 0*.*

Solução. Iniciamos observando que um número natural é divisível por 18 se, e somente se, é divisível por 2 e por 9 simultaneamente (veja a observação subsequente a este exemplo). Como $7x4$ termina em 4, que é par, temos que $7x4$ é divisível por 2. Portanto, para que $7x4$ seja divisível por 18, deve sê-lo por 9, e o critério de divisibilidade por 9 garante que isso ocorre se, e só se, $7 + x + 4 = 11 + x$ for divisível por 9. Desse modo, como x é um algarismo, obtemos $x = 7$. Assim, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Observação 4. *Se a e b são primos entre si, então um número natural é divisível pelo produto $a \cdot b$ se, e somente se, é divisível por a e por b. Por exemplo, um número natural é divisível por* 6 *se, e somente se, é divisível por* 2 *e por* 3*; é divisível por* 45 *se, e somente se, é divisível por* 5 *e por* 9*; é divisível por* 36 *se, e somente se, é divisível por* 4 *e por* 9*; é divisível por* 15 *se, e somente se, é divisível por* 3 *e por* 5*.*

Exemplo 5. *Quantos divisores pares possui o número* 600*? Quantos desses divisores são números ímpares? Quantos são pares?*

Solução. O primeiro passo é fatorar o número 600.

$$\begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, de sorte que qualquer divisor de 600 possui fatoração do tipo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, em que $a \in \{0,1,2,3\}$, $b \in \{0,1\}$ e $c \in \{0,1,2\}$. Multiplicando as quantidades de possibilidades, concluímos que 600 possui

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = \textbf{24 divisores}.$$

Para calcular a quantidade de divisores ímpares, devemos observar que um divisor ímpar não pode apresentar o fator 2 em sua decomposição. Desse modo, basta calcular a quantidade de divisores de $3^1 \cdot 5^2$. Raciocinando como acima, concluímos que a quantidade desejada de divisores é

$$2 \cdot 3 = \textbf{6 divisores ímpares}.$$

Por outro lado, para calcular a quantidade de divisores pares, devemos observar que qualquer divisor par deve, necessariamente, apresentar o fator 2 em sua decomposição em fatores primos. Então, na escolha dos expoentes dos fatores primos do divisor, temos três possibilidades para o expoente do 2 (1, 2 ou 3), duas possibilidades para o expoente do 3 (0 ou 1) e três possibilidades para o expoente do 5 (0, 1 ou 2). Isso dá um total de

$$3 \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 2 \cdot 3 = \textbf{18 divisores pares}.$$

Um modo mais alternativo para calcular a quantidade de divisores pares é calcular a diferença entre a quantidade total de divisores e a quantidade de divisores ímpares. Procedendo dessa forma, concluímos novamente que 600 possui

$$24 - 6 = \textbf{18 divisores pares}.$$

□

Exemplo 6. *Quantos divisores naturais possui o produto abaixo?*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 18.$$

(*a*) 14288.

(*b*) 14388.

(*c*) 14488.

(*d*) 14588.

(*e*) 14688.

Solução. Veja que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \left(2^2\right) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(3^2\right) \cdot (2 \cdot 5) \cdot$$
$$\cdot 11 \cdot \left(2^2 \cdot 3\right) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot \left(2^4\right) \cdot 17 \cdot \left(2 \cdot 3^2\right)$$
$$= 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1.$$

Logo, o número

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 18$$

possui

$$(16+1)\cdot(8+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) =$$

$$= 17\cdot 9\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$

divisores naturais; em particular, essa quantidade de divisores é divisível por 9. Como a única alternativa que apresenta um múltiplo de 9 é a letra **(e)** (pois $1+4+6+8+8 = 27$, que é múltiplo de 9), concluímos que essa é a resposta procurada. □

Exemplo 7 (UEL). *O menor número positivo n que torna o produto $3500n$ um cubo perfeito é:*

(*a*) 35.

(*b*) 49.

(*c*) 56.

(*d*) 98.

(*e*) 105.

Solução. Fatorando 3500, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 3500 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, $3500 = 2^2\cdot 5^3\cdot 7^1$. Por outro lado, para que um número natural seja um cubo perfeito, os expoentes dos fatores primos que aparecem em sua decomposição devem ser múltiplos de 3. Logo, o menor número n pelo qual devemos multiplicar

3500 a fim de torná-lo um cubo perfeito é $n = 2^1 \cdot 7^2 = 98$. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} 3500n &= \left(2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1\right) \cdot \left(2^1 \cdot 7^2\right) \\ &= 2^{2+1} \cdot 5^3 \cdot 7^{1+2} \\ &= 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \\ &= (2 \cdot 5 \cdot 7)^3 \\ &= 70^3. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 8 (UFMG). *Sabe-se que o número $2^{13} - 1$ é primo. Seja $n = 2^{17} - 16$. A quantidade de divisores naturais de n é:*

(a) 5.

(b) 6.

(c) 7.

(d) 10.

(e) 12.

Solução. Temos que $p = 2^{13} - 1$ é primo. Agora, veja que

$$\begin{aligned} n &= 2^{17} - 16 \\ &= 2^{17} - 2^4 \\ &= 2^{4+13} - 2^4 \\ &= 2^4 \cdot 2^{13} - 2^4 \\ &= 2^4 \left(2^{13} - 1\right) \\ &= 2^4 \cdot p^1. \end{aligned}$$

Portanto, o número de divisores de n é

$$(4+1) \cdot (1+1) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 9. *Qual o maior inteiro n tal que 3^n divide o produto $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?*

(a) 2.

(b) 7.

(c) 8.

(d) 9.

(e) 20.

Solução. Devemos contar a quantidade de fatores 3 na decomposição em primos do produto $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. para isso, veja que os números que possuem pelo menos um fator 3 são 3, 6, 9, 12, 15 e 18. Desses números, somente 9 e 18 possuem dois fatores 3 em sua decomposição; todos os demais números possuem apenas um fator 3. Assim, o expoente do fator 3 no produto dado no enunciado do problema é

$$1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8.$$

Portanto, a maior potência de 3 que divide $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é 3^8, ou seja, $n = 8$. A alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 10 (Colégio Naval). *O resto da divisão por 11 do resultado da expressão $1211^{20} + 9119^{32} \cdot 343^{26}$ é:*

(a) 9.

(b) 1.

(c) 10.

(d) 6.

(e) 7.

Solução. Um fato conhecido, e que pode ser encontrado nos materiais teóricos sobre divisibilidade, é que quando dividimos o resultado de uma soma (produto) por um número natural n, o resto encontrado é o mesmo resto obtido quando somamos os restos das divisões de cada uma parcelas (fatores) e, em seguida, dividimos o resultado por n. Em outras palavras, podemos dizer que o resto da soma (produto) é o resto da soma (produto) dos restos. Utilizaremos esse fato para resolver este exemplo.

Inicialmente, veja que a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares de 1211 é igual a

$$(1+2)-(1+1)=3-2=1.$$

Portanto, pelo critério de resto de um número por 11, temos que 1211 deixa resto 1 quando dividido por 11. Assim, 1211^{20} também deixa resto 1 quando dividido por 11, pois esse resto é igual ao resto da divisão de $1^{20}=1$ por 11.

Agora, veja que a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares de 9119 é igual a

$$(9+1)-(1+9)=10-10=0,$$

de forma que, na divisão de 9119 por 11, o resto de 9119 é igual a 0. Assim, na divisão de $9119^{32}\cdot 343^{26}$ por 11, o resto é igual a 0, independentemente do resto encontrado na divisão de 343^{26} por 11.

Portanto, na divisão de $1211^{20}+9119^{32}\cdot 343^{26}$ por 11, o resto é igual ao resto encontrado na divisão de $1+0=1$ por 11, ou seja, esse resto é igual a 1. A alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema. Em particular, é importante que os alunos conheçam as regras de divisibilidade por 2, 3, 5, 9 e 11, bem como que fiquem claras as observaçõs que foram feitas logo após o Exemplo 3 e antes da apresentação da solução do Exemplo 10.