Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 2

Ângulo entre Retas

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Ângulo entre retas que passam pela origem

Nesta seção, definimos e calculamos o ângulo entre duas retas do plano cartesiano que passam pela origem em função dos coeficientes das equações que definem tais retas.

Mais precisamente, consideremos duas retas r e r' que passam pela origem do plano cartesiano (veja a figura 1). Admitindo que nenhuma delas coincida com o eixo das abscissas, concluímos que elas têm equações gerais dadas respectivamente por

$$ax + by = 0 \quad \text{e} \quad a'x + b'y = 0,$$

com $a, a' > 0$.

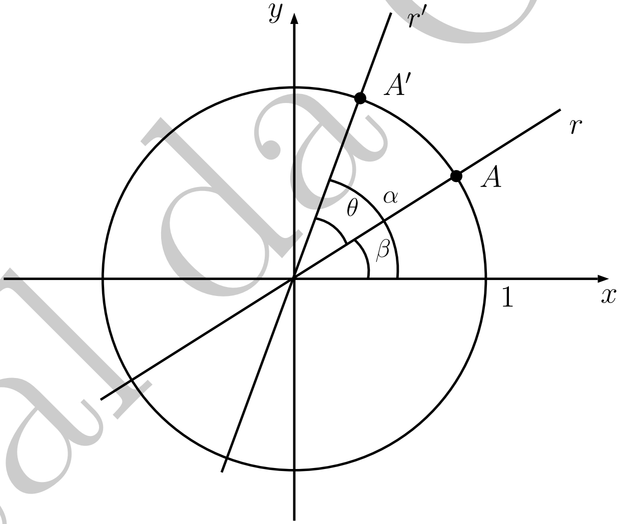

Figura 1: ângulo entre retas que passam pela origem.

Sejam A e A' os pontos de interseção das retas r e r', respectivamente, com o círculo de raio 1 centrado na origem.

Se $\alpha \in [0, \pi)$ é o ângulo formado entre a reta r' e a parte positiva do eixo das abscissas, então as coordenadas do ponto A' são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Da mesma forma, se o ângulo entre a reta r e a parte positiva do eixo das abscissas é $\beta \in [0, \pi)$, então o ponto A tem coordenadas $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$.

Por outro lado, como o ponto A' pertence à reta r', suas coordenadas satisfazem a equação dessa reta, ou seja,

$$a' \cos\alpha + b' \operatorname{sen}\alpha = 0. \tag{1}$$

De modo análogo, como o ponto A pertence à reta r, temos

$$a \cos\beta + b \operatorname{sen}\beta = 0. \tag{2}$$

Agora, se $\theta = |\alpha - \beta| \in [0, \pi)$, então θ é um dos ângulos formado pelas retas r e r' (veja que, na figura 1, a maneira como desenhamos as retas r e r' fez com que tivéssemos $\theta = \alpha - \beta$; entretanto, se trocássemos os papéis de r e r' naquele desenho, teríamos $\theta = \beta - \alpha$; portanto, em geral temos $\theta = |\alpha - \beta|$). Esse ângulo não necessariamente será o *menor* ângulo entre r e r', mas ignoraremos essa possibilidade por enquanto.

Como $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$, em qualquer caso temos

$$\cos\theta = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{3}$$

De (1) e (2) segue que

$$\cos\alpha = -\frac{b'}{a'}\operatorname{sen}\alpha, \quad \cos\beta = -\frac{b}{a}\operatorname{sen}\beta. \tag{4}$$

Substituindo em (3), obtemos

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{bb'}{aa'} \cdot \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ &= \frac{aa' + bb'}{aa'} \cdot \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Agora, elevando ao quadrado a primeira igualdade em (4) e utilizando a identidade trigonométrica fundamental $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, obtemos a equação (em $\operatorname{sen}\alpha$)

$$1 - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha = \frac{(b')^2}{(a')^2}\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Resolvendo-a lembrando que $\operatorname{sen}\alpha \geq 0$ para $\alpha \in [0, \pi)$, obtemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \tag{6}$$

Trabalhando de modo análogo com a segunda igualdade em (4), chegamos a

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{7}$$

Substituindo (6) e (7) em (5), obtemos a fórmula desejada

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \tag{8}$$

Por outro lado, se uma das retas dadas, digamos r, coincidir com o eixo das abscissas, então teremos $\theta = \alpha$, $a = 0$ mas $a' \neq 0$. Nesse caso, a primeira igualdade em (4), juntamente com (6), fornece

$$\cos\theta = \cos\alpha = -\frac{b'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \tag{9}$$

Em um qualquer dos casos acima, se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, então teremos $\cos\theta \geq 0$, de sorte que $aa' + bb' \geq 0$ no primeiro caso e $-b' \geq 0$ no segundo caso. Então, independentemente do caso, teremos

$$\cos\theta = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \tag{10}$$

(no segundo caso porque $a = 0$ reduz (8) a (9)).

Observe, agora, que pode ocorrer que $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Se esse for o caso, então, por um lado, temos $\cos\theta < 0$, de sorte que $aa' + bb' < 0$. Entretanto, isso não causará problemas, pois o menor ângulo entre as retas r e r' não será θ, mas sim $\theta' = \pi - \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Como

$$\cos\theta' = -\cos\theta > 0$$

a fórmula (10) ainda permanecerá válida.

Exemplo 1. *Calcule a medida do menor ângulo entre as retas de equações* $2x + 1 = 0$ *e* $x - \sqrt{3}y = 0$.

Solução. Nesse caso, temos $a = 2$, $b = 1$, $a' = 1$ e $d = -\sqrt{3}$. Substituindo tais valores em (10), obtemos

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \cong 0,0378. \end{aligned}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, podemos calcular facilmente

$$\theta = \arccos(0,0378) \cong 87,82^\circ.$$

$\square$

2 Ângulo entre duas retas quaisquer

Nesta seção, calculamos o ângulo entre duas retas não verticais quaisquer do plano cartesiano.

Comecemos supondo dados no plano duas retas concorrentes r e s e um ponto P, distinto de seu ponto de interseção das retas. Traçemos por P as retas r' e s', respectivamente paralelas a r e s. Como retas paralelas fazem ângulos iguais com uma transversal, é imediato que o menor ângulo entre r e s coincide com o menor ângulo entre r' e s'.

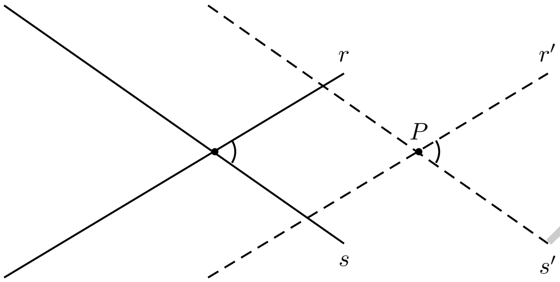

Figura 2: ângulo entre duas retas e suas paralelas por P.

Suponha, agora, que temos no plano um sistema cartesiano de coordenadas, em relação ao qual as retas r e s têm equações

$$r : ax + by + c \quad \text{e} \quad s : a'x + b'y + c' = 0$$

Suponha também, por um momento, que r não é vertical. Então seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{a}{b}$, o qual coincide com o coeficiente angular de qualquer reta paralela a r. Portanto, sendo r' a paralela a r passando pela origem do sistema cartesiano, concluímos que r' tem equação

$$r' : ax + by = 0. \tag{11}$$

Observe que esse também é o caso se r for vertical, uma vez que, nesse caso, $a = 0$ e a paralela a r passando pela origem é o próprio eixo vertical, que tem equação $0x + by = 0$. Então, (11) vale em ambos os casos.

Da mesma forma, sendo s' a paralela a s passando pela origem do plano cartesiano, temos

$$s' : a'x + b'y = 0. \tag{12}$$

Denotando por θ o menor ângulo formado por r' e s' e invocando (10), concluímos que $\cos\theta$ é dado exatamente por aquela expressão. Mas, como θ também é o menor ângulo formado por r e s, esse argumento prova a seguinte

Proposição 2. *Sejam r e s retas do plano cartesiano com equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$. Se $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ é o o menor ângulo entre r e s, então*

$$\cos\theta = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \tag{13}$$

Uma vez que r e s são perpendiculares se e só se $\theta = 90°$, o que por sua vez equivale a $\cos\theta = 0$, a proposição anterior nos fornece a seguinte consequência importante.

Corolário 3. *Se r e s são retas do plano cartesiano com equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, então r e s são perpendiculares se e só se $aa' + bb' = 0$.*

Observe que, *para retas não verticais r e s*, a condição de perpendicularismo dada pelo corolário anterior pode ser escrita como

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} = -1.$$

Recordando que $m_r = \frac{b}{a}$ e $m_s = -\frac{b'}{a'}$ são os coeficientes angulares de r e s, concluímos que a última relação acima é o mesmo

$$m_r m_s = -1. \tag{14}$$

Vejamos um exemplo de aplicação das ideias acima.

Exemplo 4. *Dois dos vértices de um triângulo equilátero são os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e o terceiro vértice está no primeiro quadrante. Calcule as coordenadas desse terceiro vértice.*

Solução. Seja (p, q) o terceiro vértice do triângulo (veja a figura 3).

A reta r que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (veja a figura 3), tem equação $x + y - 1 = 0$. Por outro lado, a reta s

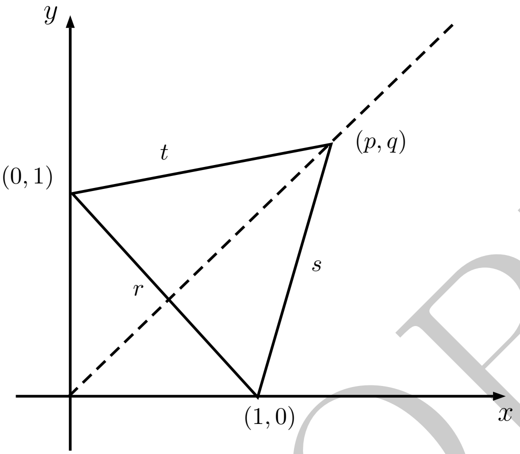

Figura 3: calculando as coordenadas do terceiro vértice de um triângulo equilátero.

que passa pelos pontos $(1,0)$ e (p,q) tem equação $\frac{y-0}{x-1} = \frac{q-0}{p-1}$ ou, o que é o mesmo,

$$y - \frac{q}{p-1}x + \frac{q}{p-1} = 0.$$

Finalmente, cálculos análogos garantem que a reta t que passa pelos pontos $(0,1)$ e (p,q) tem equação

$$y - \frac{q-1}{p}x - 1 = 0.$$

Utilizemos a fórmula (13) para calcular o cosseno do ângulo entre r e s. Nas notações de lá (com s no lugar de r', temos

$$a = b = 1, \quad a' = -\frac{q}{p-1}, \ b' = 1.$$

Lembrando que os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a $60°$, obtemos

$$\frac{1}{2} = \cos 60° = \frac{|-\frac{q}{p-1}+1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{q}{p-1}\right)^2+1}}$$
$$= \frac{\frac{|p-q-1|}{|p-1|}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{(p-1)^2+q^2}}{|p-1|}}$$
$$= \frac{|p-q-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

e, daí,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|p-q-1|}{\sqrt{(p-1)^2+q^2}}. \tag{15}$$

Recordemos, agora, que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a tal segmento em seu ponto médio. Recordemos também que os pontos da mediatriz de um segmento são exatamente aqueles pontos do plano que *equidistam* das extremidades do segmento.

Isto posto, a mediatriz do segmento que une os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ passa pela origem, uma vez que o triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$ é isósceles e tem base formada pelos dois primeiros pontos. Da mesma forma, tal mediatriz passa pelo vértice (p,q), uma vez que o triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ e (p,q) é equilátero e, portanto, isósceles de base formada por dois quaisquer de seus vértices.

Como as coordenadas do ponto médio de um segmento são as médias aritméticas das coordenadas de suas extremidades, o argumento do parágrafo anterior mostra que os pontos $(0,0)$, (p,q) e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (o ponto médio do segmento de extremidades $(1,0)$ e $(0,1)$) são colineares.

Como a equação da reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é $y=x$ e (p,q) satisfaz tal equação, concluímos que $p=q$. Logo, segue de (15) que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{(p-1)^2+p^2}}.$$

Simplificando essa relação, obtemos

$$\sqrt{2p^2 - 2p + 1} = \sqrt{2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$2p^2 - 2p - 1 = 0.$$

As soluções dessa equação quadrática são $p = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Mas, como pedimos que o ponto (p, q) pertença ao primeiro quadrante do plano cartesiano, devemos ter $p > 0$. Logo,

$$p = q = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Uma outra abordagem possível para o cálculo do ângulo entre duas retas *não verticais e não perpendiculares* do plano cartesiano é a que segue.

Como antes, sejam r e s retas não verticais com equações

$$r : ax + by + c \quad \text{e} \quad s : a'x + b'y + c' = 0,$$

e r' e s' as paralelas a r e s, respectivamente, ambas passando pela origem do sistema cartesiano. Então, vimos que

$$r' : ax + by = 0, \quad s' : a'x + b'y = 0$$

e que o menor ângulo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ formado por r e s coincide com aquele formado por r' e s'.

Sejam $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ os ângulos formados por r' e s' com a parte positiva do eixo das abscissas. Sabemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = m_{r'} = -\frac{a}{b} = m_r$$

e, analogamente,

$$\operatorname{tg} \beta = m_{s'} = -\frac{a'}{b'} = m_s.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha > \beta$. Como na seção anterior, temos

$$\theta = \alpha - \beta \ \text{ ou } \ \pi - (\alpha - \beta),$$

conforme $\alpha - \beta$ seja menor ou maior que $\frac{\pi}{2}$ (recorde que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, uma vez que estamos assumindo que r e s (e, portanto, r' e s') não são perpendiculares.

Como

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = -\,\text{tg}\,\big(\pi - (\alpha - \beta)\big)$$

e $\text{tg}\,\theta \geq 0$ (uma vez que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$), unificamos ambos os casos acima escrevendo

$$\text{tg}\,\theta = \big|\,\text{tg}\,(\alpha - \beta)\big|.$$

Então, um pouco de Trigonometria nos dá

$$\begin{aligned} \text{tg}\,\theta &= \big|\,\text{tg}\,(\alpha - \beta)\big| = \Big|\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}\Big| \\ &= \Big|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\Big|. \end{aligned} \tag{16}$$

Ainda em relação à última fórmula acima, observe que $1 + m_r m_s \neq 0$ exatamente porque supusemos r e s não perpendiculares. De fato, recorde de (14) que r e s são perpendiculares exatamente quando $m_r m_s = -1$.

Dicas para o Professor

Dois encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

A fórmula (13) que determina o *cosseno* do menor ângulo entre duas retas, tem a vantagem de não envolver a tangente, logo, não há problemas de definição envolvidos. Em particular, é possível calcular o cosseno de 90° mas não a tangente desse ângulo. Outra vantagem da expressão (13) sobre a expressão (16) é que a primeira depende diretamente dos coeficientes das equações das retas envolvidas, não sendo necessário passarmos pela etapa preliminar de determinação dos coeficientes angulares de tais retas.

Você pode procurar explorar ângulos cujos cossenos sejam conhecidos em exercícios, seguindo o modelo do exemplo 4. Em particular, se as retas r e s são paralelas, então o ângulo entre elas é igual a zero? Sugerimos discutir como esse fato decorre de ambas as expressões (13) e (16).

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.