Material Teórico - Números Inteiros e Números Racionais

Números racionais e Exercícios

Sétimo Ano

Prof. Angelo Papa Neto

1 Números racionais

O conjunto numérico

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad (1)$$

é chamado **conjunto dos números racionais**. Ele é formado pelas frações $\frac{a}{b}$ onde o **numerador** a e o **denominador** b são inteiros e $b \neq 0$. Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são ditas **equivalentes** se $ad = bc$. Para indicar essa equivalência, escrevemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Se a e b são primos entre si, ou seja, se $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$, dizemos que a fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível**. Caso contrário, podemos escrever $a = d \cdot m$ e $b = d \cdot n$, onde $d = \operatorname{mdc}(a, b)$ e $\operatorname{mdc}(m, n) = 1$. Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n},$$

uma vez que $an = (dm)n = m(dn) = mb$. Dessa forma, toda fração é equivalente a uma fração irredutível.

Mais geralmente, o argumento acima pode ser usado para justificar o que chamamos de *simplificação* de uma fração: se d é um fator comum ao numerador e ao denominador de uma fração, então ele pode ser "cancelado". Utilizando a notação acima, se $a = dm$ e $b = dn$ (não necessariamente com $d = \operatorname{mdc}(a, b)$), então

$$\frac{d \cdot m}{d \cdot n} = \frac{m}{n}.$$

Frações são úteis para expressar relações entre o todo e uma parte, como no exemplo abaixo.

Exemplo 1. *Três em cada cinco alunos de uma sala de aula gostam de futebol. Se a sala tem* 30 *alunos, quantos deles gostam de futebol?*

Solução: se três em cada cinco alunos da sala gostam de futebol, então $\frac{3}{5}$ dos alunos gostam de futebol. De um total de 30 alunos, concluímos que $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$ gostam de futebol.

Vale ressaltar que a relação $\frac{3}{5}$ não depende do número total de alunos na sala. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2. *Na mesma sala do exemplo 1, chegaram mais* 5 *alunos novatos, dos quais três gostam de futebol. A proporção de alunos da sala que gostam de futebol foi mantida? Caso apenas dois dos cinco novatos gostassem de futebol, qual seria a nova proporção?*

Solução: o total de alunos da sala, após a chegada dos novatos, passou a ser $30 + 5 = 35$, e o número deles que gostam de futebol passou a ser $18 + 3 = 21$. Logo, a proporção de alunos que gostam de futebol passou a ser $\frac{21}{35} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{3}{5}$, ou seja, a proporção se manteve.

Caso apenas dois dos alunos novatos gostassem de futebol, o número total de alunos a gostar de futebol seria $18 + 2 = 20$, enquanto o total de alunos continuaria sendo $30 + 5 = 35$. Logo, a proporção de alunos aficionados por futebol seria $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$, ou seja, 4 em cada 7 alunos gostariam de futebol.

O exemplo a seguir ilustra outra situação possível.

Exemplo 3. *Pedro tem* 6 *carrinhos e Miguel tem* 12 *carrinhos. Qual a proporção entre a quantidade de carrinhos de Miguel e a quantidade de carrinhos de Pedro? Se Pedro ganhar mais três carrinhos, qual passará a ser a proporção entre tais quantidades?*

Solução: como Pedro tem 6 carrinhos e Miguel tem 12 carrinhos, é claro que

$$\frac{12}{6} = 2,$$

e Miguel tem o dobro de carrinhos que Pedro tem. Isso responde a primeira pergunta.

Suponhamos, agora, que Pedro ganhou mais três carrinhos. Como $9 < 12 < 2 \cdot 9$, Miguel ainda tem mais carrinhos do que Pedro, mas passou a ter menos do que o dobro de carrinhos de Pedro. A maneira adequada de expressar a nova proporção entre os números de carrinhos dos dois é por meio de um número racional. Dividindo a quantidade de carrinhos de Miguel pela nova quantidade de carrinhos de Pedro, obtemos

$$\frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Assim, se Pedro ganhar mais 3 carrinhos, então Miguel terá $4/3$ do número de carrinhos de Pedro.

Números racionais tembém surgem em geometria, quando queremos fazer *medições*. Medir um objeto é comparar seu tamanho com o tamanho de um objeto padrão, que chamamos *unidade de medida*. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4. *Usando uma haste de madeira, Justino quer medir o comprimento de uma bicicleta. Ele faz isso justapondo a haste até esgotar o tamanho da bicicleta. Ele percebe que duas hastes iguais à que ele tem, quando justapostas, têm comprimento total menor do que o da bicicleta, mas três dessas hastes, quando justapostas, têm comprimento total maior do que o da bicicleta. Usando uma haste menor do que a primeira, Justino percebe que a haste menor cabe exatamente* 5 *vezes dentro da haste maior e exatamente* 13 *vezes dentro do comprimento da bicicleta. Pergunta-se:*

(a) É possível fazer a medição com a haste maior?

(b) É possível fazer a medição com a haste menor?

(c) Quais números correspondem ao comprimento da bicicleta, quando este é medido usando-se a haste maior ou a haste menor?

Solução: *se ℓ é o comprimento da haste maior, h é o comprimento da haste menor e b é o comprimento da bicicleta, então as observações de Justinos podem ser facilmente traduzidas nas relações*

$$2\ell < b < 3\ell, \quad \ell = 5h \quad e \quad b = 13h.$$

Das desigualdades envolvendo ℓ e b, segue que ℓ não cabe um número inteiro de vezes dentro de b. Assim, o resultado da medição do comprimento da bicicleta usando-se a haste maior como padrão **não é um número inteiro**.

Como $b = 13h$, podemos dizer que o comprimento da bicicleta é igual a 13, se a unidade de medida for a haste menor. Logo, com a haste menor como unidade de medida, o comprimento da bicicleta é dado por um número inteiro.

Como $\ell = 5h$ e $b = 13h$, temos que

$$\frac{b}{\ell} = \frac{13h}{5h} = \frac{13}{5}.$$

Assim, também é possível medir o comprimento da bicicleta usando-se a haste maior, mas o número que corresponde a esse comprimento é 13/5, que é um número racional, mas não inteiro. O significado do número 13/5 é que um quinto da haste maior (isto é, a haste menor) cabe 13 vezes dentro do comprimento da bicicleta.

Observação 5. *Mais adiante, veremos que existem comprimentos cuja medida em relação a uma determinada unidade não pode ser um número racional.*

Os exemplos acima sugerem a seguinte interpretação para um número racional:

Um número racional representa a relação de proporção entre duas grandezas que possuem múltiplos iguais.

Nos exemplos 1, 2 e 3, as duas grandezas às quais nos referimos acima foram as quantidades de elementos de dois conjuntos. No exemplo 4, elas foram os comprimentos das duas hastes; ainda nesse último caso, garantimos que tais comprimentos têm múltiplos iguais quando dizemos que a haste menor cabe exatamente cinco vezes dentro da haste maior.

Todo número racional admite uma representação decimal, a qual pode ser finita, como por exemplo $\frac{3}{5} = 0,6$, ou infinita e periódica, como por exemplo $\frac{5}{9} = 0,5555\ldots$. Estudaremos essas representações, em detalhe, na próxima seção.

Todo número inteiro n pode ser escrito como uma fração: $n = \frac{n}{1}$. Isso significa que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Mais precisamente, temos (figura 1)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

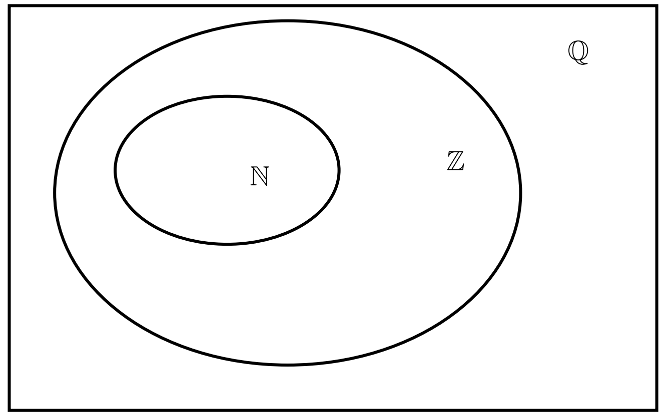

Figura 1: conjuntos numéricos.

A seguir, iremos estabelecer as notações usuais para alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{Q}$.

O conjunto dos números racionais **não nulos** é denotado por

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0 \right\}.$$

Outros subconjuntos importantes de $\mathbb{Q}$ são: o conjunto dos números racionais **não negativos**

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, ab \geq 0 \right\},$$

o conjunto dos números racionais **não positivos**

$$\mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, ab \leq 0 \right\},$$

o conjunto dos números racionais **positivos**

$$\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab > 0 \right\},$$

e o conjunto dos números racionais **negativos**

$$\mathbb{Q}_-^* = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab < 0 \right\}.$$

2 Dízimas periódicas

Vamos começar caracterizando os números racionais que têm representações decimais finitas.

Uma fração irredutível $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b \in \mathbb{N}^*$, tem representação decimal finita se, e somente se, $b = 1$ ou os únicos fatores primos de b são 2 ou 5.

De fato, se $b = 2^n 5^m$, onde m e n são números naturais, então

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 2^m \cdot 5^n}{b \cdot 2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^m \cdot 5^n}{2^n 5^m \cdot 2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^m \cdot 5^n}{10^{m+n}}.$$

Essa última fração tem denominador igual a uma potência de 10, o que significa que a sua representação decimal é finita.

Reciprocamente, se a representação decimal de r é finita, então é possível escrever $r = \frac{N}{10^\ell}$, para algum $N \in \mathbb{Z}$. Cancelando, do numerador e do denominador, o número $d = \mathrm{mdc}\,(N, 10^l)$, obtemos $r = \frac{a}{b}$, onde $\mathrm{mdc}\,(a, b) = 1$ e b é um divisor de 10^ℓ. Logo, os únicos fatores primos de b são 2 ou 5.

Ainda em relação à discussão acima, concluímos que, se o denominador b da fração irredutível $r = \frac{a}{b}$ tiver um divisor primo diferente de 2 e de 5, então a representação decimal de r será **infinita**. No entanto, ainda podemos manter algum controle sobre essa representação, como veremos a seguir.

Exemplo 6. *As representações decimais de* $1/3$, $1/11$ *e* $1/7$ *são*

$$1/3 = 0,333\ldots$$

$$1/11 = 0,090909\ldots$$

$$2/15 = 0,13333\ldots$$

$$1/7 = 0,142857142857\ldots$$

Notemos que, nas representações decimais acima, sempre há um bloco de algarismos que, repetido sistematicamente a partir de um certo ponto, forma toda a representação decimal. Representações decimais com essa propriedades são chamadas **periódicas**.

Vamos fazer algumas observações interessantes sobre as frações do exemplo anterior. Multiplicando a igualdade $1/3 = 0,333\ldots$ por 3, obtemos a desconcertante identidade:

$$1 = 0,999\ldots,$$

que é a igualdade entre um número com representação decimal finita ($1 = 1,0$) e outro com representação decimal infinita ($0,999\ldots$).

Para justificar essa igualdade, podemos pensar de forma indireta: vamos mostrar que 1 e $0,999\ldots$ não podem ser diferentes. É claro que $0,999\ldots$ não pode ser maior do que 1. Por outro lado, escrevendo por um momento que $s = 0,999\ldots$, e supondo que s é estritamente menor do que 1, concluímos que a diferença $1 - s$ é um número positivo (possivelmente muito pequeno). Portanto, podemos tomar um número $t = 0,0\ldots01$, com uma quantidade suficientemente grande de zeros, de modo que t seja menor do que a diferença $1 - s$. (Isso é possível porque a diferença $1 - s$ está fixada, enquanto a quantidade de zeros em t pode aumentar o quanto for necessário, fazendo com que t seja tão pequeno quanto desejemos.) Da desigualdade $t < 1 - s$, segue que $s + t < 1$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} t + s &= 0,999\ldots + 0,0\ldots01 \\ &= 1,0\ldots0999\ldots > 1. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição, pois $s+t$ não pode ser simultaneamente maior e menor do que 1. Dessa forma, $0,999\ldots$ **não pode ser** menor do que 1. Como também não pode ser maior do que 1, resta-nos somente concluir pela alternativa $0,999\ldots = 1$.

O leitor bem informado poderá, neste ponto, objetar que a igualdade $0,999\ldots = 1$ pode ser obtida de modo bem mais simples, por um recurso algébrico: de $s = 0,999\ldots$, segue que

$$10s = 9,999\ldots = 9 + 0,999\ldots = 9 + s,$$

ou, ainda, $10s = 9 + s$; logo, $s = 1$. Esse raciocínio pode, de fato, ser encontrado na sugestão de leitura complementar 1, p.53. Nas próximas páginas, faremos uso desse artifício repetidas vezes, para calcular as *frações geratrizes* de dízimas periódicas.

Em defesa do raciocínio exposto anteriormente, temos dois argumentos: o primeiro é que a manipulação algébrica de expressões infinitas é algo delicado e que requer justificativa; em nosso caso, o ponto sutil do argumento algébrico está na passagem $10s = 9,999\ldots = 9 + s$. Além disso, como segundo argumento, podemos apelar para a boa vontade do leitor e dizer que o raciocínio que apresentamos inicialmente, envolvendo desigualdades, está na base do que chamamos de *Teoria de Eudoxo sobre os incomensuráveis*, brilhantemente exposta no livro V dos *Elementos* de Euclides e retomada por Karl Weierstrass, vinte séculos mais tarde, quando ele estabeleceu a definição precisa da noção matemática de *limite*.

Uma representação decimal periódica também é chamada de **dízima periódica**. A parte da dízima periódica que se repete é chamada **período** da dízima. O **comprimento** do período é o seu número de algarismos. Costumamos denotar dízimas periódicas escrevendo uma barra sobre o período da dízima. Por exemplo, escrevemos $1/3 = 0,\overline{3}$, $1/11 = 0,\overline{09}$, $2/15 = 0,1\overline{3}$ e $1/7 = 0,\overline{142857}$. Essas dízimas têm, portanto, períodos de comprimentos 1, 2, 1 e 6, respectivamente.

Se qualquer algarismo da parte decimal de uma dízima faz parte do seu período, ela é chamada dízima periódica **simples**. As dízimas do exemplo 6 são todas simples, exceto por $0,1333\ldots$. Nesse último caso, há uma parte da representação decimal que não se repete, e dizemos que a dízima periódica é **composta**.

Voltando às frações do exemplo 6, colecionamos, a seguir, duas curiosidades que o leitor pode, após o término da leitura da aula, checar por si mesmo:

(i) se n é um número inteiro tal que $1 \le n \le 9$, então a representação decimal de $n/11$ é $0,\overline{ab}$, onde $10a + b = 9n$. Dessa forma, temos: $2/11 = 0,\overline{18}$, $3/11 = 0,\overline{27}$, $4/11 = 0,\overline{36}$, etc.

(ii) a representação decimal de $n/7$, onde n é um inteiro tal que $1 \le n \le 6$, é formada por um período de comprimento 6, cujos algarismos são os mesmos do período 142857, possivelmente em uma ordem diferente:

$$2/7 = 0,\overline{285714}$$

$$3/7 = 0,\overline{428571}$$
$$4/7 = 0,\overline{571428}$$
$$5/7 = 0,\overline{714285}$$
$$6/7 = 0,\overline{857142}$$

Vejamos, agora, um resultado importante.

A representação decimal de um número racional é finita ou infinita e periódica.

Como já vimos, o caso em que a representação decimal é finita ocorre se, e somente se, o denominador da fração tem como fatores primos somente 2 ou 5. Vamos, agora, considerar uma fração a/b, onde $b > 0$ é divisível por algum primo diferente de 2 e 5. Assim, a representação decimal de a/b é infinita. Para mostrar que essa representação é periódica, basta observarmos que, numa divisão por b, há somente uma quantidade finita de possibilidades para o resto r, uma vez que $0 < r < b$ (o resto 0 não ocorre, posto que a representação decimal de a/b é infinita). Dessa forma, necessariamente haverá uma porção da representação decimal que se repetirá. Vejamos um exemplo.

Exemplo 7. *Vamos descobrir o período de $4/7$ fazendo divisões sucessivas.*

$$\begin{array}{r|l}
40 & 7 \\ \cline{2-2}
-35 & 0,571428 \\ \hline
50 & \\
-49 & \\ \hline
10 & \\
-7 & \\ \hline
30 & \\
-28 & \\ \hline
20 & \\
-14 & \\ \hline
60 & \\
-56 & \\ \hline
4 &
\end{array}$$

A sequência de restos que aparecem nessas divisões é $5, 1, 3, 2, 6$ e 4. Quando o resto 4 aparece, o processo se repete. Logo, os algarismos que aparecem em seguida, na representação decimal de $4/7$, são uma repetição dos seis primeiros algarismos.

Voltando ao caso geral, para determinarmos a representação decimal de a/b, com $b > 0$, devemos fazer divisões sucessivas por b. Mas, como a divisão por b só pode deixar um número finito de restos, certamente haverá uma repetição de restos após um número finito de divisões. Quando ocorrer a primeira repetição, a sequência dos restos se repete, e teremos uma dízima periódica. Por outro lado, procedendo assim, podemos determinar o período da dízima.

Conforme já ilustrado no exemplo 6, nem sempre o primeiro algarismo da representação decimal é o que se repete pela primeira vez. A seguir, vemos um exemplo ligeiramente mais complicado.

Exemplo 8. *Vamos determinar a dízima periódica que corresponde à fração $\frac{43}{132}$.*

$$\begin{array}{r|l}
430 & 132 \\ \cline{2-2}
-396 & 0,3257 \\ \hline
340 & \\
-264 & \\ \hline
760 & \\
-660 & \\ \hline
1000 & \\
-924 & \\ \hline
76 &
\end{array}$$

Após o aparecimento do resto 76, o processo se repete, aparecendo os restos 100 e 76, alternadamente, o que provoca o aparecimento dos algarismos 5 e 7 na representação decimal de $43/132$. Portanto, $43/132 = 0,32575757\ldots = 0,32\overline{57}$. Essa é uma dízima periódica composta.

Seguindo o caminho contrário, vamos agora procurar a fração que corresponde a um número racional expresso em sua forma decimal. De modo mais preciso, queremos resolver o seguinte problema:

Conhecida a representação decimal de um número racional r, encontre a e $b \neq 0$ inteiros, primos entre si, tais que $r = \frac{a}{b}$.

A exigência de que a e b sejam primos entre si, isto é, que $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$, justifica-se pelo fato de a fração a/b ser, neste caso, irredutível e, portanto, única.

No caso em que essa representação decimal é finita, é suficiente escrever r como um número inteiro sobre uma potência de 10 e, se necessário, simplificar a fração.

Exemplo 9. *Dado $r = 12,71359$, podemos escrever*

$$r = \frac{1271359}{100000}.$$

Como 1271359 não é múltiplo de 2 nem de 5, a fração acima está na forma irredutível.

Exemplo 10. *Dado $r = 17,325$, podemos escrever*

$$r = \frac{17325}{1000} = \frac{3465}{200} = \frac{693}{40}.$$

Como 693 e 40 são primos entre si, a fração $693/40$ está na forma irredutível.

Como já vimos acima, no caso em que a representação decimal de $r \in \mathbb{Q}$ é infinita, ela tem que ser periódica. Uma fração que corresponde a uma dízima periódica é chamada uma **geratriz** da dízima.

Para determinarmos a fração geratriz da dízima periódica r, multiplicamos r por uma potência conveniente de 10, de modo a podermos eliminar a parte periódica da dízima com o auxílio de uma subtração. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 11. *Seja* $r = 13,\overline{67}$. *Multiplicando* r *por* 100, *obtemos* $100r = 1367,\overline{67}$. *Subtraindo a primeira igualdade da segunda, obtemos*

$$100r - r = 1367,676767\ldots - 13,676767\ldots = 1354 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 99r = 1354 \Rightarrow r = \frac{1354}{99}.$$

Exemplo 12. *Seja* $r = 4,512\overline{37}$. *Como essa dízima periódica é composta, uma maneira de proceder é escolher a potência de* 10 *pela qual multiplicaremos* r *de modo a, primeiramente, isolar a parte periódica da dízima da parte não periódica. Em nosso caso específico, multiplicamos* r *por* 1000, *obtendo* $1000r = 4512+0,\overline{37}$. *A geratriz da parte periódica* $p = 0,\overline{37}$ *pode ser calculada como no exemplo anterior, multiplicando* p *por* 100*:*

$$100p = 37,\overline{37} \Rightarrow 100p - p = 37,\overline{37} - 0,\overline{37} = 37 \Rightarrow 99p = 37.$$

Assim $p = 37/99$ *e*

$$1000r = 4512+0,\overline{37} = 4512+p = 4512+\frac{37}{99} = \frac{446688+37}{99}.$$

Portanto,

$$r = \frac{446725}{99000}.$$

3 Exercícios

A seguir, exibiremos alguns exercícios envolvendo números racionais.

Exemplo 13. *Os números* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ *formam uma sequência chamada* **sequência de Fibonacci**, *em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170 - 1250), conhecido como Leonardo Fibonacci. Ela é obtida a partir dos dois primeiros termos,* 1 *e* 1, *por meio da seguinte regra:* cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores. *Essa regra é chamada* **lei de formação da sequência**. *Os primeiros termos da sequência de Fibonacci podem ser facilmente encontrados a partir da lei de formação:* $2 = 1+1$, $3 = 1+2$, $5 = 2+3$, $8 = 3+5$, $13 = 5+8$, *etc.*

Considere as frações

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$$

formadas pelas razões entre números de Fibonacci consecutivos. Para as cinco primeiras, podemos escrever

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3/2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5/3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}},$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{8/5} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}.$$

Mostre que podemos obter expressões como as dos segundos membros acima para qualquer fração onde numerador e denominador sejam números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Solução: de fato, se f_{n-1}, f_n e f_{n+1} são três números consecutivos da sequência de Fibonacci, podemos escrever

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n+1}/f_n} = \frac{1}{\frac{f_{n-1}+f_n}{f_n}} = \frac{1}{1+\frac{f_{n-1}}{f_n}}.$$

Assim, admitindo que a fração f_{n-1}/f_n pode ser escrita como nos primeiros casos, concluímos, a partir da última expressão acima, que o mesmo pode ser feito para a fração f_n/f_{n+1}.

Observação 14. *No exemplo anterior, mostramos a validade de um resultado para um caso inicial e, depois, mostramos que, se o resultado vale para um determinado passo, vale também para o passo seguinte. Essa ideia, chamada* **princípio da indução finita** *ou* **matemática**, *é uma ferramenta muito útil para a demonstração de teoremas que envolvem a contagem de objetos por números naturais.*

Exemplo 15 (IMO-1959). *Mostre que, para todos os inteiros positivos* n, *a fração*

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

é irredutível.

Solução: para mostrarmos que a fração dada é irredutível, devemos mostrar que numerador e denominador são inteiros primos entre si, ou seja, os únicos divisores comuns de $21n+4$ e $14n+3$ são 1 e -1. Fixado um inteiro positivo n

arbitrário, seja d um divisor comum de $21n+4$ e $14n+3$. Podemos escrever $21n+4 = dq$ e $14n+3 = dk$, onde q e k são números inteiros.

Como $2 \cdot (21n+4) - 3 \cdot (14n+3) = -1$, temos $2dq - 3dk = -1$, ou seja, $d(2q-3k) = -1$. Isso implica que d divide -1, logo d só pode ser 1 ou -1. Portanto a fração dada é irredutível, para qualquer n inteiro positivo.

Comentário: fixados inteiros positivos a, b, c, d, sob que condições podemos repetir o argumento acima para mostrarmos que a fração

$$\frac{an+b}{cn+d}$$

é irredutível? A seguir, iremos produzir uma família de frações deste tipo.

O que queremos é encontrar inteiros k e ℓ tais que, para qualquer n inteiro positivo,

$$k(an+b) - \ell(cn+d) = \pm 1.$$

Como

$$k(an+b) - \ell(cn+d) = (ka - \ell c)n + (kb - \ell d),$$

para que a igualdade acima seja válida para qualquer n inteiro positivo, devemos ter $ka - \ell c = 0$ e $kb - \ell d = \pm 1$. Como estamos supondo que a, b, c, d são positivos, podemos escrever

$$\frac{\ell}{k} = \frac{a}{c}.$$

Podemos eliminar k nas duas equações acima, para obter $\ell(bc - ad) = \pm a$. Então $\ell bc = a(d\ell \pm 1)$, ou seja,

$$\frac{\ell}{k} = \frac{a}{c} = \frac{b\ell}{d\ell \pm 1},$$

de onde concluímos que

$$k = \frac{d\ell \pm 1}{b}.$$

Como k é inteiro, devemos que $b \mid (d\ell \pm 1)$.

Para simplificar, vamos supor que $b = 4$ e $d = 3$ (como no problema inicial). Assim, $k = \frac{3\ell \pm 1}{4}$ e $4 \mid (3\ell \pm 1)$. Temos, portanto, que:

$$\begin{cases} 4 \mid (3\ell - 1) & \Rightarrow \quad \ell = 4j+3 \quad \text{e} \quad k = 3j+2 \\ 4 \mid (3\ell + 1) & \Rightarrow \quad \ell = 4j+1 \quad \text{e} \quad k = 3j+1 \end{cases}$$

com $j \geq 0$ inteiro. Dessa forma, $\frac{a}{c} = \frac{4j+3}{3j+2}$ ou $\frac{a}{c} = \frac{4j+1}{3j+1}$.

Por exemplo, a fração

$$\frac{2012n+4}{1508n+3}$$

é irredutível para qualquer n inteiro positivo. De fato, fazendo $j = 125$, obtemos $\frac{4j+3}{3j+2} = \frac{2012}{1508}$, $k = 3j+2 = 377$ e $\ell = 4j+3 = 503$. Assim,

$$377 \cdot (2012n+4) - 503 \cdot (1508n+3) = -1$$

e o mesmo argumento que usamos no problema da IMO-1959 funciona aqui.

Exemplo 16. *Encontre todos os números inteiros positivos x, y e z tais que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Solução: uma solução imediata é $x = y = z = 3$. Vamos procurar outras soluções. Como a equação dada é simétrica em relação às três incógnitas, podemos supor que $x \leq y \leq z$.

Uma observação fundamental para a resolução do problema é que, *se x for muito grande, y e z também serão e a soma será muito pequena para ser igual a* 1. Diante disso, cabe a pergunta: quão grande x pode ser? Se $x > 3$, então $y > 3$ e $x > 3$, logo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Assim, devemos ter $x \leq 3$, isto é, $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.

Se $x = 1$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, o que é impossível, pois y e z são positivos.

Se $x = 3$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Repetindo o raciocínio acima, vemos que, se $y > 3$, então $z > 3$ e $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{3}$. Assim, devemos ter $3 = x \leq y \leq 3$, ou seja, $y = 3$, logo $z = 3$. Dessa forma, obtemos a solução $x = y = z = 3$, que já conhecíamos.

Se $x = 2$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Se $y > 4$, então $z \geq y > 4$ e $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Então, temos $2 = x \leq y \leq 4$. Se $y = 2$, obtemos a partir da equação dada que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} = 1$, isto é, $\frac{1}{z} = 0$, o que é impossível. Assim, temos $y = 3$ ou $y = 4$. Se $y = 3$, então $z = 6$, e, se $y = 4$, então $z = 4$.

Portanto, os únicos números inteiros positivos $x \leq y \leq z$ que satisfazem a equação dada são $x = y = z = 3$, ou $x = 2$ e $y = z = 4$, ou ainda $x = 2$, $y = 3$ e $z = 6$.

Dicas para o professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

A argumentação desenvolvida nos parágrafos logo após o exemplo 6 deve ser explorada com calma e, se possível, com outros exemplos. O estudo das dízimas periódicas é o primeiro contato que o estudante tem com processos infinitos. Igualdades como $1 = 0,999\ldots$ trazem embutida a noção de limite, tão importante e, no entanto, tão negligenciada em nosso ensino básico, talvez por ser concebida como algo "avançado" e pouco acessível.

Você pode estimular seus alunos a fazerem experiências com uma calculadora, em busca de padrões nas dízimas periódicas. Por exemplo, se p é um número primo diferente de 2 e 5, a dízima correspondente a/p tem período cujo comprimento ℓ é um divisor de $p-1$. Mais informações desse tipo podem ser encontradas na sugestão de leitura complementar 2, p.147.

Sugestões de Leitura Complementar

1. Ivan Niven. *Números Racionais e Irracionais.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 1984.

2. Hans Rademacher e Otto Toepliz. *The Enjoyment of Mathematics.* New York, Dover, 1990.