Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Seno, Cosseno e Tangente
Parte 2

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de julho de 2024

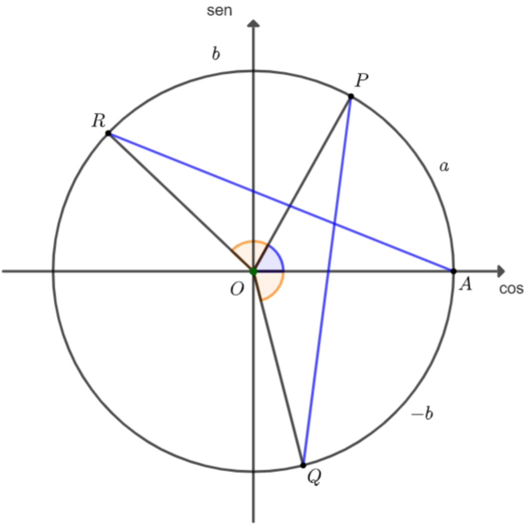
Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, vamos deduzir fórmulas que permitem calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença de números reais quaisquer a e b, desde que sejam conhecidos os valores dessas funções trigonométricas em a e b.

Cosseno da soma de dois números reais

Sejam a e b números reais e P, Q e R os pontos do círculo trigonométrico associados aos arcos de medidas a, $-b$ e $a+b$, respectivamente. Considere, também, o ponto $A = (1{,}0)$.

Inicialmente, suporemos que a e b são positivos e que $a + b \leq 2\pi$. Veja a figura abaixo.



Veja que os arcos $\overset{\frown}{PQ}$ (que contém A) e $\overset{\frown}{AR}$ (que contém P) têm medidas iguais (a $a + b$), logo, o mesmo ocorre com as cordas PQ e AR. Por outro lado, as coordenadas dos pontos P, Q e R são dadas por $P = (\cos a, \operatorname{sen} a)$, $Q = (\cos(-b), \operatorname{sen}(-b)) = (\cos b, -\operatorname{sen} b)$ e $R = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$. Desse modo, graças à fórmula para a distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 = \overline{AR}^2 &\Longrightarrow (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 \\
&\qquad = (\cos(a+b) - 1)^2 + (\operatorname{sen}^2(a+b) - 0)^2 \\
&\Longrightarrow \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a \\
&\qquad + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b = \cos^2(a+b) \\
&\qquad - 2\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) \\
&\Longrightarrow \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b \\
&\qquad + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - 2\cos a \cos b = \cos^2(a+b) \\
&\qquad + \operatorname{sen}^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 \\
&\Longrightarrow 1 + 1 + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - 2\cos a \cos b \\
&\qquad = 1 - 2\cos(a+b) + 1 \\
&\Longrightarrow 2 + 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos a \cos b) \\
&\qquad = 2 - 2\cos(a+b) \\
&\Longrightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.
\end{aligned}$$

Assim, deduzimos a fórmula para o cosseno da soma de a e b quando a e b são positivos e $a + b \leq 2\pi$:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{1}$$

Observe, no entanto, que o argumento acima continua válido quando $a,b > 0$ e $a+b > 2\pi$. Realmente, sendo $a+b = c + 2k\pi$, com $0 \leq c < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, o arco $\overset{\frown}{AR}$, percorrido a partir de A no sentido anti-horário, terá comprimento $a+b-2k\pi = c$. Da mesma forma, o arco $\overset{\frown}{PQ}$, percorrido a partir de P no sentido *horário*, terá comprimento $a - (-b) - 2k\pi = c$. Assim, as cordas AR e PQ ainda serão iguais, de forma que a dedução de (1) pode ser feita exatamente como acima.

Os casos em que $a < 0 < b$ (ou $a > 0 > b$) e $a,b < 0$ decorrem do fato de que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$ e $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$. Por exemplo, se $a > 0 > b$ e $k \in \mathbb{Z}+$ for tal que $b + 2k\pi > 0$, então (1) (aplicada a arcos de comprimentos a

e $b+2k\pi$) dá

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a+b+2k\pi)\\ &= \cos a\cos(b+2k\pi) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b+2k\pi)\\ &= \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b.\end{aligned}$$

Cosseno da diferença de dois números reais

Utilizando a fórmula (1) e o fato de que $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, qualquer que seja x real, obtemos uma outra fórmula, agora para o cosseno da diferença de a e b:

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a+(-b))\\ &= \cos a\cos(-b) - \operatorname{sen} a\operatorname{sen}(-b)\\ &= \cos a\cos b - \operatorname{sen} a(-\operatorname{sen} b)\\ &= \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b. \tag{2}$$

Exemplo 1. *Calcule:*

(a) $\cos 75^\circ$.

(b) $\cos 15^\circ$.

Solução. Recordemos que $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ$ e $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$. Utilizando a fórmula (1), obtemos

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ)\\ &= \cos 30^\circ\cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ\operatorname{sen} 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula (2), obtemos

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ)\\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

□

Seno da soma de dois números reais

Para calcular o seno da soma de dois números reais a e b, iniciamos utilizando a fórmula (2) para calcular

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen} x\\ &= 0\cdot\cos x + 1\cdot\operatorname{sen} x\\ &= \operatorname{sen} x,\end{aligned}$$

obtendo, assim, a importante identidade

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \tag{3}$$

Agora, utilizando-a em conjunção com a fórmula (2), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\operatorname{sen} b\\ &= \operatorname{sen} a\cos b + \cos a\operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

isto é,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a. \tag{4}$$

Note que, também a partir de (3), podemos calcular

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+a\right)\\ &= \cos a,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a. \tag{5}$$

Seno da diferença de dois números reais

Recorrendo uma vez mais às identidades $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e utilizando a fórmula (4), deduziremos, agora, uma fórmula para o seno da diferença de dois números reais. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}(a+(-b))\\ &= \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a\\ &= \operatorname{sen} a \cos b + (-\operatorname{sen} b)\cos a\\ &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \tag{6}$$

Exemplo 2. *Calcule:*

(a) $\operatorname{sen} 105°$.

(b) $\operatorname{sen} 15°$.

Solução. Utilizando a fórmula (4), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}105^\circ &= \cos(60^\circ+45^\circ)\\ &= \operatorname{sen}60^\circ\cos 45^\circ + \operatorname{sen}45^\circ\cos 60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter percebido que $105^\circ = 180^\circ - 75^\circ$, de sorte que (6) dá

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}105^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ-75^\circ)\\ &= \operatorname{sen}180^\circ\cos 75^\circ - \operatorname{sen}75^\circ\cos 180^\circ\\ &= 0\cdot\cos 75^\circ - \operatorname{sen}75^\circ(-1)\\ &= \operatorname{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula (6), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}15^\circ &= \operatorname{sen}(60^\circ-45^\circ)\\ &= \operatorname{sen}60^\circ\cos 45^\circ - \operatorname{sen}45^\circ\cos 60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

□

Observação 3. *O argumento utilizado para a segunda estratégia de cálculo de* $\operatorname{sen}105^\circ$ *mostra, mais geralmente, que*

$$\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen}x \quad e \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x.$$

Verifique!

Observação 4. *Poderíamos ter obtido os valores de* $\operatorname{sen} 105°$ *e de* $\operatorname{sen} 15°$ *utilizando a identidade* $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$*. De fato, temos que*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 105° &= \cos(90° - 105°)\\ &= \cos(-15°)\\ &= \cos 15°\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15° &= \cos(90° - 15°)\\ &= \cos 75°\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Tangente da soma de dois números reais

Para encontrar uma fórmula que permita calcular a tangente da soma de dois números reais, utilizaremos as fórmulas (1) e (4). De fato, se as tangentes de a, b e $a+b$ estiverem definidas, poderemos escrever

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.\end{aligned}$$

Agora, dividindo o numerador e o denominador dessa última expressão por $\cos a \cos b$ (o qual é não nulo, uma vez que $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} b$ estão definidos), obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}\\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}.\end{aligned}$$

Operando os cancelamentos evidentes nas duas frações do numerador e nas duas do denominador da última expressão acima, chegamos finalmente a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} - \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{7}$$

Tangente da diferença de dois números reais

Para encontrar uma fórmula para a tangente da diferença, utilizamos a fórmula (7) e procedemos de maneira análoga às deduções das fórmulas do seno e do cosseno de uma diferença:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)}.$$

Lembrando, agora, que

$$\operatorname{tg}(-b) = \frac{\operatorname{sen}(-b)}{\cos(-b)} = \frac{-\operatorname{sen} b}{\cos b} = -\operatorname{tg} b,$$

temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{tg} a + (-\operatorname{tg} b)}{1 - \operatorname{tg} a(-\operatorname{tg} b)} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{8}$$

Exemplo 5. *Utilizando as fórmulas* (7) *e* (8)*, calcule:*

(a) $\operatorname{tg} 255^\circ$.

(b) $\operatorname{tg} 15°$.

Solução. Recordemos que $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$ e $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Além disso, como a função tangente tem período π (arco que, por sua vez, corresponde a $180°$), temos

$$\operatorname{tg} 255° = \operatorname{tg}(180° + 75°) = \operatorname{tg} 75°.$$

Agora, utilizando a fórmula (7) para a tangente da soma, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(30° + 45°) &= \frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 45°} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} \\
&= 2 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Por fim, utilizando a fórmula para a tangente da diferença (8), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) &= \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 45°} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. É fundamental que os alunos se habituem a utilizar as fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois números reais, pois a familiaridade com essas fórmulas será importante para resolver problemas mais complexos que surgirão à frente. Para atingir esse objetivo, sugerimos que sejam apresentados outros exemplos, até que os alunos utilizem tais fórmulas com desenvoltura.

Sugestões de Leitura Complementar

1 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.

2. M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner *Trigonometria e Números Complexos*. SBM, 2005.