

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Teorema do Valor Médio - Parte VII

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de Março de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta última parte da aula, resolveremos mais alguns problemas em cujas soluções aplicamos o TVM ou alguns de seus variantes estudados anteriormente.

Exemplo 1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, em que I é um intervalo (não degenerado). Se a for interior a I , a segunda derivada de Schwarz de f em a é definida como*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2},$$

caso o limite exista e seja finito.

- (i) *Se f for de classe C^2 , mostre que a segunda derivada de Schwarz de f em a existe e coincide com $f''(a)$, ou seja, prove que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a). \quad (1)$$

- (ii) *Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pelas regras*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Prove que a segunda derivada de Schwarz de f na origem existe e é nula, muito embora f não seja duas vezes derivável na origem.

Prova. Aplicando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange a f em a , com $n = 2$, obtemos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(c_h)}{2}h^2$$

e

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(d_h)}{2}h^2$$

para $h \neq 0$, em que c_h (resp. d_h) é um ponto do intervalo aberto de extremos a e $a+h$ (resp. a e $a-h$). Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + \frac{f''(c_h) + f''(d_h)}{2}h^2,$$

de sorte que

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{f''(c_h) + f''(d_h)}{2}. \quad (2)$$

Como $c_h, d_h \rightarrow a$ quando $h \rightarrow 0$, a hipótese de continuidade de f'' garante que $f''(c_h), f''(d_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f''(a)$. Portanto, fazendo $h \rightarrow 0$ em (2), segue (1).

Quanto ao item (ii), o fato da função f em questão ser ímpar assegura que

$$f(h) + f(-h) - 2f(0) = 0 - 2 \cdot 0 = 0,$$

para todo real h . Daí, a segunda derivada de Schwarz de f na origem é nula. Por outro lado, conforme discutido no exemplo 7 da aula *Propriedades - Parte II*, do módulo *Derivada como Função*, as segundas derivadas laterais de f na origem existem mas são distintas, de modo que f não é duas vezes derivável na origem. $\square$

Exemplo 2 (IMC - 1998). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ e $f(1) = 1$. Mostre que existe um número real $c \in (0, 1)$ satisfazendo*

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0. \quad (3)$$

Prova. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função de regra $g(x) = f(x)^2 + 2f'(x)$. O fato de f ser duas vezes derivável garante que g é derivável, com

$$g'(x) = 2(f(x)f'(x) + f''(x)), \quad (4)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Agora, observe $g(0) = 2^2 + 2 \cdot (-2) = 0$; portanto, se mostrarmos que $g(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (0, 1)$, o teorema de Rôlle (aplicado a $g|_{[0, x_0]}$) garantirá a existência de $c \in (0, x_0)$ tal que $g'(c) = 0$. Daí, fazendo $x = c$ em (4), obteremos (3). Portanto, para concluir a solução basta justificarmos a seguinte

Afirmção. Existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0$.

De fato, comecemos analisando o caso em que $f(t) < 0$ para algum $t \in (0, 1)$. Se assim for, as desigualdades $f(0) > 0 > f(t)$ e $f(t) < 0 < f(1)$, juntamente com o TVI, garantem a existência de pontos $u \in (0, t)$, $v \in (t, 1)$ tais que $f(u) = f(v) = 0$. Desse modo, existem

$$\alpha = \max\{x \in (0, t] \mid f(x) = 0\}$$

e

$$\beta = \min\{x \in [t, 1) \mid f(x) = 0\},$$

de sorte que $f|_{(\alpha, \beta)} < 0$.

Agora, para $x \in (\alpha, \beta)$, temos

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(x)}{x - \alpha} < 0;$$

portanto, fazendo $x \rightarrow \alpha^+$, segue que $f'(\alpha) \leq 0$. De forma similar, prova-se que $f'(\beta) \geq 0$, de onde se conclui que $g(\alpha) = f(\alpha)^2 + 2f'(\alpha) \leq 0$ e, analogamente, $0 \leq g(\beta)$. Então, uma outra aplicação do TVI garante a existência de $x_0 \in [\alpha, \beta]$ (logo, $x_0 \in (0, 1)$) satisfazendo $g(x_0) = 0$.

Para terminar, devemos considerar o caso em que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Se f admitir algum zero $a \in (0, 1)$, então a será um ponto de mínimo local para f , de forma que $f'(a) = 0$ e, portanto, $g(a) = f(a)^2 + 2f'(a) = 0$; daí, bastará pormos $x_0 = a$.

Por outro lado, se $f \geq 0$ em $[0, 1]$ mas f não admitir zeros nesse intervalo, então $f > 0$ em $[0, 1]$. Então, a função $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x - \frac{2}{f(x)}$, é derivável e tal que $h'(x) = 1 + \frac{2f'(x)}{f(x)^2}$. Como $h(0) = -1 = h(1)$, o teorema de Rôlle dá $x_0 \in (0, 1)$ tal que $h'(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0)^2 + 2f'(x_0) = 0$. Mas isso é o mesmo que $g(x_0) = 0$. $\square$

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável, com f' e f'' crescentes, e $a \leq b$ dois números reais fixados.

- (i) Mostre que, para cada $x > 0$, existe um único número real $\xi(x)$ satisfazendo a relação

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(b+x) - f(a-x)}{b-a+2x}. \quad (5)$$

- (ii) Prove que a função $\xi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente.

Solução. De início, para $x > 0$, o TVM aplicado à restrição de f ao intervalo $[a-x, b+x]$ assegura a existência de $c_x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{f(b+x) - f(a-x)}{(b+x) - (a-x)} = \frac{f(b+x) - f(a-x)}{b-a+2x}.$$

Para ver que c_x é o único real com essa propriedade, observe que f' é injetiva, pois é crescente. Então, se a relação acima valer para um certo c (i.e., se a igualdade obtida substituindo-se c_x por c ainda for verdadeira), conclui-se de $f'(c) = f'(c_x)$ que $c = c_x$.

Portanto, para cada $x > 0$ existe um único $c_x \in \mathbb{R}$ satisfazendo (5), mostrando que a regra $x \mapsto \xi(x) := c_x$ define uma função $\xi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nas condições prescritas.

Para mostrarmos que ξ é crescente, sejam $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(x) = \frac{f(b+x) - f(a-x)}{b-a+2x}.$$

Como $\varphi = f' \circ \xi$ e f' é crescente, se mostrarmos que φ é crescente então ξ também será crescente. Realmente, sendo φ crescente, seguirá que

$$\begin{aligned} 0 < x < y &\Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y) \Rightarrow f'(\xi(x)) < f'(\xi(y)) \\ &\Rightarrow \xi(x) < \xi(y), \end{aligned}$$

uma vez que f' é crescente.

Como φ é derivável, para provar que ela é crescente é suficiente provar que $\varphi'(x) > 0$ para todo $x > 0$, isto é, que

$$\frac{\psi(x)}{(b-a+2x)^2} > 0,$$

em que $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\psi(x) = (f'(b+x) + f'(a-x))(b-a+2x) - 2(f(b+x) - f(a-x)).$$

Assim, $\psi'(x) > 0$ equivale a $\psi(x) > 0$.

Para o que falta, note que as hipóteses sobre f garantem que ψ também é derivável, com

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (f''(b+x) - f''(a-x))(b-a+2x) \\ &\quad + 2(f'(b+x) + f'(a-x)) - 2(f'(b+x) + f'(a-x)) \\ &= (f''(b+x) - f''(a-x))(b-a+2x);\end{aligned}$$

como f'' é crescente e $b+x > a-x$ para todo $x > 0$ (já que $b \geq a$), temos $f''(b+x) - f''(a-x) > 0$ e $b-a+2x > 0$ para $x > 0$, logo, $\psi'(x) > 0$. Então, ψ é crescente e a próxima afirmação demonstrará sua positividade.

Afirmação. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) \geq 0$.

Antes de justificarmos a afirmação, observe que ela realmente implica $\psi > 0$, pois, sendo ψ crescente, vale $\psi(x) > \lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) \geq 0$, para cada $x > 0$.

Para o que falta, note inicialmente que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = (f'(b) + f'(a))(b-a) - 2(f(b) - f(a)),$$

o que sugere estudarmos a função $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = (f'(t) + f'(a))(t-a) - 2(f(t) - f(a)).$$

Note que g é derivável, com

$$\begin{aligned}g'(t) &= f''(t)(t-a) + f'(t) - 2f'(t) + f'(a) \\ &= f''(t)(t-a) - (f'(t) - f'(a)).\end{aligned}$$

Para $t > a$, o TVM aplicado à restrição de f' ao intervalo $[a, t]$ fornece $c \in (a, t)$ tal que $f'(t) - f'(a) = (t-a)f''(c)$, logo,

$$\begin{aligned}g'(t) &= f''(t)(t-a) - (t-a)f''(c) \\ &= (t-a)(f''(t) - f''(c)) > 0,\end{aligned}$$

uma vez que $a < c < t$ e f'' é crescente. Portanto, g é crescente, de sorte que $t > a \Rightarrow g(t) > g(a) = 0$. Desse modo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = g(b) \geq 0.$$

□

Para o próximo exemplo, dados $x \neq y \in I$ e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, seja m_{xy} a inclinação da reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x, f(x)), (y, f(y))$, isto é,

$$m_{xy} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como observamos na aula *Propriedades - Parte III*, no módulo *Derivada como Função*, se $x < z < y$ forem pontos de I , a inclinação m_{xy} é uma média ponderada das inclinações m_{xz} e m_{zy} :

$$m_{xy} = (1 - t)m_{xz} + tm_{zy},$$

com $t = \frac{y-z}{y-x} \in (0, 1)$. Em particular, m_{xy} é um ponto do intervalo fechado de extremos m_{xz} e m_{zy} .

Exemplo 4 (Miklós Schweitzer - 1975). *Sejam $a < b < c < d$ números reais e $f : [a, d] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em (a, d) . Mostre que existem pontos $r \in (a, c), s \in (b, d)$ tais que*

$$f(c) - f(a) = f'(r)(c - a), \quad f(d) - f(b) = f'(s)(d - b), \quad (6)$$

com $r < s$.

Prova. Nas notações acima, precisamos encontrar $r \in (a, c), s \in (b, d)$ tais que $m_{ac} = f'(r), m_{bd} = f'(s)$, com $r < s$. A ideia do argumento reside na seguinte

Observação. Se $x < z < y$ forem pontos de $[a, d]$ e $\alpha \in (x, z), \beta \in (z, y)$ forem tais que $m_{xz} = f'(\alpha), m_{zy} = f'(\beta)$, existirá $\gamma \in [\alpha, \beta]$ satisfazendo $m_{xy} = f'(\gamma)$. Além disso, se for $m_{xz} \neq m_{zy}$, teremos $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Com efeito, os comentários anteriores ao exemplo mostram que m_{xy} é um ponto do intervalo de extremos $f'(\alpha)$ e $f'(\beta)$.

De acordo com o teorema de Darboux, f' goza da propriedade do valor intermediário, de sorte que $m_{xy} = f'(\gamma)$ para algum $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Por fim, se γ não pertencer ao interior de $[\alpha, \beta]$, temos $m_{xy} = f'(\gamma) = f'(\alpha) = m_{xz}$ ou $m_{xy} = f'(\gamma) = f'(\beta) = m_{zy}$, conforme seja $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$. Mas m_{xy} , sendo uma média ponderada dos números m_{xz} , m_{zy} com pesos positivos, só pode coincidir com um desses números se ocorrer de $m_{xz} = m_{zy}$, encerrando a justificativa da observação.

Em se tratando da solução do exemplo, o TVM fornece $u \in (a, b)$, $v \in (b, c)$ e $w \in (c, d)$ tais que $m_{ab} = f'(u)$, $m_{bc} = f'(v)$ e $m_{cd} = f'(w)$. Pela observação, existem $p \in [u, v]$, $q \in [v, w]$ satisfazendo $m_{ac} = f'(p)$, $m_{bd} = f'(q)$.

Se qualquer uma das desigualdades $p \leq v$ ou $v \leq q$ for estrita, teremos $p < q$, $p \in (a, c)$, $q \in (b, d)$ e a solução estará encerrada com $r := p$, $s := q$. Caso contrário, valerá $p = v = q$ e a (contrapositiva da) 2ª parte da observação garantirá que $f'(u) = f'(v) = f'(w)$. Assim, $m_{ac} = f'(u)$ e $m_{bd} = f'(w)$, o que implica (6) se tomarmos $r := u$, $s := w$. $\square$

Exemplo 5 (OBMU - 2018, 2ª Fase). *Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ uma função suave e tal que:*

(i) $f^{(k)}(x) > 0$, para todos $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m) \in \mathbb{N}$.

Prove que $f(n) \geq 2^{n-1}$ para todo inteiro positivo n .

Prova. Como $f(1)$ é um inteiro positivo, temos $f(1) = 1 + n_0$, sendo n_0 um inteiro não negativo. Portanto,

$$f(0 + 1) = 2^0 + n_0, \quad 0 \leq n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Mais geralmente, temos a seguinte

Afirmção. Existe uma sequência $(n_i)_{i \geq 0}$ de inteiros não negativos tais que

$$f(k + 1) = 2^k + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n_i, \quad (7)$$

para todo inteiro $k \geq 0$.

Por óbvio, a justificativa dessa afirmação encerrará a solução.

Observe que a fórmula acima, para $k = 0$, se resume à definição do termo n_0 . No que segue, construiremos os demais termos da sequência (n_i) indutivamente.

Seja $k \geq 1$ e suponhamos que $0 \leq n_0, n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{Z}$ já tenham sido definidos de forma a validar as relações

$$f(r+1) = 2^r + \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} n_j, \quad (8)$$

para cada $0 \leq r < k$. Nossa meta é garantir a existência de um inteiro $n_k \geq 0$ tal que (7) seja satisfeita.

Pelo teorema do valor médio para diferenças finitas ¹, aplicado a f com $a = h = 1$ e $n = k$, existe $c \in (1, k+1)$ tal que

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(1 + (k-i)) = f^{(k)}(c). \quad (9)$$

Pelas hipóteses (i) e (ii) do enunciado, o segundo membro da relação acima é positivo, enquanto o primeiro é um número inteiro. Logo, $f^{(k)}(c) \geq 1$ e $n_k := f^{(k)}(c) - 1$ é um inteiro não negativo. No que segue, mostraremos que esse valor de n_k assegura a validade da igualdade desejada, (7).

De fato, observando que a primeira parcela no somatório em (9) (relativa a $i = 0$) é $f(k+1)$, vem que

$$f(k+1) = - \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(1 + (k-i)) + 1 + n_k.$$

Daí, fazendo $r := k - i$ e mantendo a hipótese de indução (8)

¹Confira o Teorema 4 da parte VI dessa aula.

em mente, obtemos

$$\begin{aligned}
 f(k+1) &= - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(r+1) + 1 + n_k \\
 &= - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \left(2^r + \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} n_j \right) + 1 + n_k \\
 &= - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} 2^r \\
 &\quad - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=0}^r (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j + 1 + n_k \\
 &= 2^k - \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} 2^r (-1)^{k-r} \\
 &\quad - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=0}^r (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j + 1 + n_k.
 \end{aligned}$$

Agora, a fórmula do binômio de Newton dá

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} 2^r (-1)^{k-r} = (2-1)^k = 1,$$

logo,

$$f(k+1) = 2^k - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=0}^r (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j + n_k.$$

Observando que

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=0}^r (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=j}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j,$$

(verifique!) podemos escrever

$$f(k+1) = 2^k - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=j}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} n_j + n_k. \quad (10)$$

Mas, de acordo com o lema 6 abaixo, temos

$$\sum_{r=j}^k (-1)^r \binom{k}{r} \binom{r}{j} = 0,$$

de onde segue imediatamente que

$$\sum_{r=j}^{k-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{r}{j} = -\binom{k}{j}.$$

Substituindo essa informação em (10), conclui-se que

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n_j + n_k \\ &= 2^k + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n_j, \end{aligned}$$

encerrando a justificativa da afirmação. □

Lema 6. *Se $j < k$ forem inteiros positivos, então*

$$\sum_{r=j}^k (-1)^r \binom{k}{r} \binom{r}{j} = 0.$$

Prova. É imediato verificar, a partir da definição de número binomial, que $\binom{k}{r} \binom{r}{j} = \binom{k-j}{r-j} \binom{k}{j}$ para $j \leq r \leq k$. Operando essa substituição, juntamente com a mudança de variável $i = r - j$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{r=j}^k (-1)^r \binom{k}{r} \binom{r}{j} &= \sum_{r=j}^k (-1)^r \binom{k-j}{r-j} \binom{k}{j} \\ &= (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} \\ &= (-1)^j \binom{k}{j} (1-1)^{k-j} = 0. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Em relação ao item (i) do exemplo 1, vale dizer que basta supor f duas vezes derivável em a a fim de concluir que a segunda derivada de Schwarz de f em a (existe e) coincide com $f''(a)$. O argumento segue as mesmas linhas daquele apresentado no texto, utilizando a *fórmula de Taylor com resto infinitesimal*² em vez da fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. T. Andreescu. et al. *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus in the Real Axis*. New York: Springer, 2009.
2. M. Spivak. *Calculus*. 4^a ed. Houston: Publish or Perish, 2008.

²Vide [2], Teorema 1 do capítulo 20.