Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Raízes Complexas da Unidade

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de dezembro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 As raízes (complexas) da unidade

Vimos na aula anterior que, para qualquer complexo w e qualquer inteiro positivo n, existem em $\mathbb{C}$ exatamente n raízes n-ésimas de w.

Um caso bastante importante é aquele em que $w = 1$. Os números complexos, z, que satisfazem $z^n = 1$ são chamados de **raízes n-ésimas da unidade**. Como $1 = 1 \cdot \text{cis}(0)$, podemos aplicar a segunda fórmula de De Moivre (veja a aula anterior), com $r = 1$ e $\theta = 0$, para obter as raízes n-ésimas da unidade, que iremos denotar por $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$:

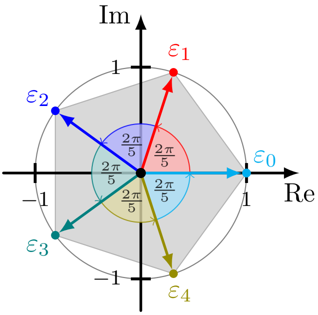
$$\varepsilon_k = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ para } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$

De outra forma, podemos verificar diretamente que os números $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ definidos acima são distintos e, para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, satisfazem

$$(\varepsilon_k)^n = \left(\text{cis}\,\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \text{cis}(2k\pi) = \text{cis}(0) = 1.$$

Cada uma das raízes da unidade possui módulo 1, já que $\sqrt[n]{1} = 1$ (no reais). Logo, quando representadas no plano de Argand-Gauss, todas estão situadas sobre o círculo de centro na origem e raio 1. Para $n \geq 3$, assim como ocorre com as raízes n-ésimas de outros complexos, elas formam um polígono regular. Além disso, uma vez que o próprio 1 é uma das raízes n-ésimas de 1 (para qualquer n), temos a propriedade adicional de que um dos vértices desse polígono é o afixo do número 1.

A figura a seguir mostra as raízes quintas da unidade (caso em que $n = 5$).



Exemplo 1. *Calcule todas as raízes quartas da unidade.*

Solução 1. Queremos encontrar todos os possíveis valores de x tais que $x^4 = 1$. Usando a fórmula para as raízes quartas de números complexos, temos quatro raízes, ε_0, ε_1, ε_2 e ε_3:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \operatorname{cis}(0) = 1,\\
\varepsilon_1 &= \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = i,\\
\varepsilon_2 &= \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}(\pi) = -1,\\
\varepsilon_3 &= \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{4}\right) = -i.
\end{aligned}$$

□

Solução 2. Queremos encontrar todos os possíveis valores de x tais que $x^4 = 1$. Veja que $x^4 - 1 = 0$ e a expressão à esquerda da igualdade pode ser fatorada como

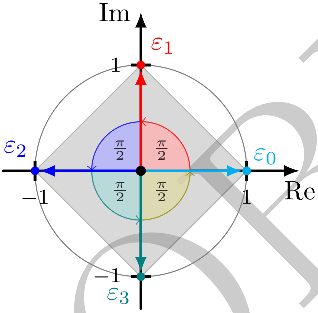
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Assim, pelo menos um dos dois fatores precisa ser igual a zero, ou seja,

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 1 = 0.$$

No primeiro caso, temos que $x^2 = 1$, o que implica $x = 1$ ou $x = -1$. No segundo caso, temos que $x^2 = -1$, o que implica que $x = i$ ou $x = -i$. Assim, reobtemos os valores 1, -1, i e $-i$ para as quatro raízes quartas da unidade. $\square$

Solução 3. Usando o fato de que as 4 raízes formam um polígono regular no plano de Argand-Gauss, temos que elas são vértices de um quadrado. Ademais, o número 1 é um desses vértices e todos eles devem estar sobre o círculo de raio 1. Seguem que os vértices do quadrado são os afixos dos complexos 1, i, -1 e $-i$.



$\square$

Exemplo 2. *Seja z uma raiz n-ésima da unidade. Seja m um natural qualquer e r o resto da divisão de m por n. Mostre que $z^m = z^r$.*

Solução. Do enunciado, temos que $z^n = 1$. Sendo q o quociente da divisão de m por n, temos $m = nq + r$. A partir daí, segue que

$$z^m = z^{nq+r} = (z^n)^q\, z^r = 1^q\, z^r = z^r,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Ao realizarmos cálculos algébricos com raízes n-ésimas da unidade, uma observação importante é que, pondo

$$\varepsilon = \mathrm{cis}(2\pi/n),$$

temos que ε é a raiz n-ésima da unidade de menor argumento não nulo. Além disso, usando a fórmula para potenciação de complexos com expoente inteiro, obtemos:

$$\varepsilon^k = \mathrm{cis}(2k\pi/n) = \varepsilon_k.$$

Assim, as raízes n-ésimas da unidade são os números complexos

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}.$$

Para o que segue, recorde que a soma dos n primeiros termos de uma PG cujo primeiro termo é a e a razão é $r \neq 1$ vale

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}. \tag{2}$$

Tal fórmula pode ser justificada da seguinte maneira: sendo

$$S = a + ar + \ldots + ar^{n-1},$$

temos que $Sr = ar + ar^2 + \ldots + ar^n$. Subtraindo membro a membro essas duas igualdades, obtemos

$$Sr - S = ar^n - a.$$

Por sua vez, esta relação é o mesmo que $S(r-1) = a(r^n - 1)$, o que equivale a (2).

Exemplo 3. *Seja* $\varepsilon = \mathrm{cis}(2\pi/n)$. *Calcule o valor da soma* $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$.

Solução. Lembre-se de que $\varepsilon^n = 1$. Além disso, a soma do enunciado é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão ε. Sendo assim,

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = \frac{0}{\varepsilon - 1} = 0.$$

$\square$

Observação 4. *Se* $z = a + bi$ *e* $w = c + di$, *sabemos que* $z + w = (a + c) + (b + d)i$. *Por sua vez, se* $\mathbf{u} = (a,b)$ *e*

$\mathbf{v} = (c,d)$ *são os vetores geométricos de origem* $(0,0)$ *e tendo os afixos de* z *e* w *por extremidades, temos*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a,b) + (c,d) = (a + c,b + d),$$

que é exatamente o vetor geométrico de origem $(0,0)$ *e tendo o afixo de* $z + w$ *por extremidade.*

Assim, se $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = z$ *e* $\mathbf{u}_k$ *é o vetor de origem* $(0,0)$ *e tendo o afixo de* ε^k *por extremidade, então* $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n-1}$ *é o vetor de origem* $(0,0)$ *e tendo o afixo de* z *por extremidade. Portanto, o resultado do exemplo anterior garante que*

$$\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{0},$$

justificando uma relação amplamente utilizada em Mecânica.

Exemplo 5. *Seja* z *uma raiz de* $x^5 - 1 = 0$ *com* $z \neq 1$*. Calcule o valor de* $S = z^{15} + z^{16} + \ldots + z^{50}$*.*

Solução. Essa expressão é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão z e primeiro termo z^{15}, que possui $50 - 15 + 1 = 36$ termos. Assim, usando (2), obtemos:

$$S = \frac{z^{15}(z^{36} - 1)}{z - 1}.$$

Como $z^5 = 1$, $15 = 5 \cdot 3 + 0$ e $36 = 5 \cdot 7 + 1$, o resultado do Exemplo 2 dá $z^{15} = 1$ e $z^{36} = z$. Logo,

$$S = \frac{1 \cdot (z - 1)}{z - 1} = 1.$$

□

Exemplo 6. *Calcule o valor da expressão:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right).$$

Solução. Antes de começarmos a solução propriamente dita, adiantamos que a ideia por trás dela é ver as parcelas da soma dada (a menos de sinais) como as partes reais de algumas das raízes 11-ésimas da unidade.

Seja $w = \text{cis}(\frac{\pi}{11})$ que é raiz 11-ésima da unidade de menor argumento não nulo. Partindo da expressão

$$1 + w + \ldots + w^{10} = 0$$

e dividindo ambos os lados por w^5, obtemos:

$$w^{-5} + w^{-4} + \ldots + w^{-1} + 1 + w + \ldots + w^4 + w^5 = 0.$$

Reordenando as parcelas, obtemos:

$$(w + w^{-1}) + (w^2 + w^{-2}) + \ldots + (w^5 + w^{-5}) = -1. \qquad (3)$$

Agora, note que para todo k inteiro, os números w^k e w^{-k} são conjugados e satisfazem:

$$\begin{aligned} w^k + w^{-k} &= \text{cis}\left(\frac{k\pi}{11}\right) + \text{cis}\left(-\frac{k\pi}{11}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right). \end{aligned}$$

Substituindo tais igualdades (para k variando de 1 a 5) em (3), obtemos

$$2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{10\pi}{11}\right)\right) = -1.$$

Dividindo ambos os lados da expressão acima por -2 e percebendo que

$$\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right), \quad \cos\left(\frac{8\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

e

$$\cos\left(\frac{10\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{11}\right),$$

chegamos a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{11}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Assim, a soma do enunciado vale $1/2$.

□

Exemplo 7. *Mostre*[1] *que as raízes n-ésimas de um complexo não nulo qualquer são obtidas multiplicando-se qualquer uma delas pelas raízes n-ésimas da unidade.*

Solução. Sejam w um complexo não nulo qualquer e z uma raiz n-ésima de w, ou seja, $z^n = w$. Seja, ainda, ε_k definido como na equação (1).

Veja que, para $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, o número $z \cdot \varepsilon_k$ satisfaz:

$$(z \cdot \varepsilon_k)^n = z^n \cdot \varepsilon_k^n = w \cdot 1 = w.$$

Logo, cada um dos números $z\varepsilon_0, z\varepsilon_0, \ldots, z\varepsilon_{n-1}$ é também uma raiz n-ésima de w.

Por outro lado, esses n números são dois a dois distintos, pois z é não nulo; assim, eles são todas as n raízes n-ésimas de w. □

Observação 8. *Sejam $w = r \operatorname{cis}\theta$, $n \in \mathbb{N}$ e $z_0, \ldots, z_{n-1}$ as raízes n-ésimas de w. A segunda fórmula de De Moivre pode ser reescrita como:*

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)\\ &= \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\\ &= z_0\cdot\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Dessa forma, as raízes $z_0, \ldots, z_{n-1}$ pode ser obtidas multiplicando-se z_0 por $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, respectivamente.

[1] Na solução desse exemplo na vídeo aula, a professora usa nomes diferentes para as variáveis (invertendo os papeis de z e w). Essa escolha é arbitrária e ambas as soluções estão corretas. Mas resolvemos escrever assim, para manter a notação consistente com restante do que está escrito no material teórico, facilitando a leitura como um todo.

O Exemplo 7 nos mostra que, se trocarmos z_0 por uma raiz n-ésima qualquer, digamos z, de w, também iremos obter $z_0, \ldots, z_{n-1}$, porém em outra ordem. Por exemplo, fazendo $z = z_1$, obtemos $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_0$; por outro lado, fazendo $z = z_2$, obtemos $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, z_0, z_1$, e assim por diante.

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 minutos.

Mais exemplos podem ser encontrados nas referências listadas a seguir. Para a referência [3], vá ao endereço sugerido, clique no menu superior em "Materiais", depois em "Baixar todo conteúdo compactado"; em seguida, descompacte o arquivo baixado e navegue para a pasta Nível 3, ALGN3, Aula 8.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.

3. C. Magalhães e M. Mendes. *A*plicações de raízes da unidade. POTI, `https://poti.impa.br/`, Curso de Álgebra, Nível 3, Aula 8.