Material Teórico - Módulo de Expressões Algébricas e Polinômios

Parte 2 - Resolução de exercícios

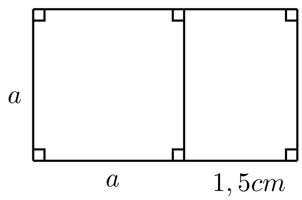
Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta aula, resolveremos alguns exercícios envolvendo expressões algébricas, empregando o material discutido na aula anterior.

Exemplo 1 (Banco de questões OBMEP). *O que representam, na figura abaixo, as expressões $a^2 + 1,5a$ e $4a + 3$?*



Solução. Observe que a figura é um retângulo formado por um quadrado de lado a e um outro retângulo menor, de lados a e $1,5cm$. Logo, a área do retângulo é igual à soma das áreas do quadrado e do retângulo menor, de forma que vale $a^2 + 1,5a$. Por outro lado, o perímetro do retângulo é dado por $2 \cdot (a + 1,5 + a) = 4a + 3$. Portanto, as expressões $a^2 + 1,5a$ e $4a + 3$ representam, respectivamente, a área e o perímetro do retângulo dado na figura. □

Exemplo 2. *Determine o valor numérico da expressão algébrica*

$$\frac{x^2y^3 - xz^2}{x^3y^2 + yz}$$

para $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$.

Solução. Atribuindo os valores $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$ à expressão algébrica do enunciado, obtemos a expressão numérica

$$\frac{(-1)^2 \cdot 1^3 - (-1) \cdot 2^2}{(-1)^3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2} = \frac{1+4}{-1+2} = 5.$$

□

Exemplo 3 (OBM 2010). *Os números reais x e y são distintos de zero, distintos entre si e satisfazem a igualdade*

$$x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

Então, o valor de xy é igual a:

(a) 4.

(b) 1.

(c) -1.

(d) -4.

(e) é preciso de mais dados.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} &\Leftrightarrow x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow x - y = \frac{y-x}{xy} \\ &\Leftrightarrow x - y = -\frac{x-y}{xy}. \end{aligned}$$

Mas, como $x \neq y$, podemos cancelar a diferença $x - y$ nos dois membros da última igualdade. Assim fazendo, obtemos $1 = -\frac{1}{xy}$ ou, o que é o mesmo, $xy = -1$. Portanto, a alternativa correta é o item (c). □

Exemplo 4. *Determine o polinômio $P(x)$, de grau 2, tal que $P(1) = 3$, $P(-2) = 9$ e $P(x) = P(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Solução. Como $P(x)$ é um polinômio de grau 2, podemos escrever

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a, b e c são números reais, sendo $a \neq 0$. Utilizando a hipótese $P(x) = P(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} P(x) = P(-x) &\Rightarrow ax^2 + bx + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c \\ &\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o fato que dois polinômios são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos coeficientes (ou simplesmente cancelando as parcelas ax^2 e c em ambos os membros da última igualdade acima), concluímos que $b = -b$, ou seja, $b = 0$. Então, $P(x) = ax^2 + c$. Por outro lado,

$$P(1) = a \cdot 1^2 + c = a + c = 3$$

e

$$P(-2) = a \cdot (-2)^2 + c = 4a + c = 9.$$

Finalmente, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ 4a + c = 9 \end{cases},$$

obtemos $a = 2$ e $c = 1$, donde concluímos que $P(x) = 2x^2 + 1$. □

Exemplo 5. *Sejam a, b e c números reais não nulos, tais que $a + b + c = 0$. Observe que $a + b = -c \neq 0$, $b + c = -a \neq 0$ e $a + c = -b \neq 0$. Agora, calcule o valor de cada uma das expressões abaixo:*

(a) $\dfrac{a^2}{(b+c)^2} + \dfrac{b^2}{(a+c)^2} + \dfrac{c^2}{(a+b)^2}.$

(b) $\dfrac{a^3}{(b+c)^3} + \dfrac{b^3}{(a+c)^3} + \dfrac{c^3}{(a+b)^3}.$

Solução. Temos:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(a+c)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{a^2}{(-a)^2}+\frac{b^2}{(-b)^2}+\frac{c^2}{(-c)^2}=1+1+1=3$$

e

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(a+c)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}=$$

$$=\frac{a^3}{(-a)^3}+\frac{b^3}{(-b)^3}+\frac{c^3}{(-c)^3}=-1-1-1=-3.$$

$\square$

Exemplo 6. *Sejam a, b e c números reais tais que $a+b+c=0$. Mostre que $a^3+b^3+c^3=3abc$.*

Solução. Observe que

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3. \qquad (1)$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\\ &= \left(a^2+ab+ab+b^2\right)\cdot(a+b)\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b) \qquad (2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Comparando (1) e (2), obtemos

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3,$$

e daí,

$$a^3+b^3+c^3=-3a^2b-3ab^2=3ab\cdot(-a-b)=3abc.$$

$\square$

Exemplo 7. *Quais são o quociente e o resto da divisão de $A(x)=x^4-x^2+2$ por $B(x)=x^2+2x-1$?*

Solução. Utilizando o método estudado na aula anterior para determinar o resto e o quociente da divisão de dois polinômios, obtemos:

1	0	-1	0	2	1	2	-1
-1	-2	1			1	-2	4
	-2	0	0	2			
	2	4	-2				
		4	-2	2			
		-4	-8	4			
			-10	6			

Portanto, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são, respectivamente, $Q(x)=x^2-2x+4$ e $R(x)=-10x+6$. $\square$

Exemplo 8. *Determine a e b de modo que a divisão de $A(x)=x^3-ax+b$ por $B(x)=x^2-x+2$ seja exata.*

Solução. Efetuando a divisão entre os dois polinômios, obtemos:

1	0	$-a$	b	1	-1	2
-1	1	-2		1	1	
	1	$-a-2$	b			
	-1	1	-2			
		$-a-1$	$b-2$			

Daí, segue que o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são, respectivamente, $Q(x)=x+1$ e $R(x)=(-a-1)x+(b-2)$. Portanto, para que a divisão seja exata, isto é, para que tenhamos $R(x)=0$, devemos ter $-a-1=0$ e $b-2=0$, de forma que $a=-1$ e $b=2$. $\square$

Exemplo 9. *Ao dividirmos um polinômio qualquer $A(x)$ por um polinômio $B(x)$, mônico e cujo grau é igual a 1, digamos, $B(x)=x-m$, obtemos*

$$A(x)=Q(x)\cdot(x-m)+R(x),$$

em que $R(x)=r\in\mathbb{R}$, pois devemos ter $\partial R<1$ ou $R=0$.

Calculando o valor numérico do polinômio $A(x)$ em $x=m$, obtemos

$$A(m)=Q(m)\cdot(m-m)+r,$$

donde concluímos que $A(m)=r$. De outra forma, o resto é o polinômio constante e igual ao valor numérico de $A(x)$ em m.

Exemplo 10. *Determine α de modo que a divisão de $A(x)=2x^3-5x^2+7x-\alpha$ por $B(x)=x-2$ deixe resto 9.*

Solução. De acordo com o exemplo 9, o resto da divisão de $A(x)=2x^3-5x^2+7x-\alpha$ por $B(x)=x-2$ é o polinômio constante e igual a $A(2)$.

Agora, por um lado, temos

$$\begin{aligned}A(2) &= 2\cdot2^3-5\cdot2^2+7\cdot2-\alpha\\ &= 16-20+14-\alpha=10-\alpha.\end{aligned}$$

Por outro, o resto deve ser igual a 9, o que acarreta a igualdade

$$10-\alpha=9,$$

de sorte que $\alpha=1$. $\square$

Dicas para o Professor

Duas sessões de 50min são suficientes para resolver os exemplos que compõem este material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 6*: Complexos, Polinômios, Equações.* São Paulo, Atual Editora, 2012.