Material Teórico - Módulo Notação Algébrica e Introdução às Equações

Parte 2 - Sentenças

7º ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

13 de julho de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Sentenças matemáticas

Atribuímos o nome de **sentença** a qualquer frase declarativa. Todas as frases abaixo são exemplos de sentenças.

(a) π é um número racional;

(b) $\frac{5}{3}$ é menor que 2;

(c) O quadrado de 4 é diferente de 16;

(d) -2 pertence ao conjunto dos números racionais;

(e) A quarta parte de x é igual a 4;

(f) O estado do Amapá fica localizado na região Centro-oeste;

(g) Salvador é a capital do estado da Bahia.

Exceto pelas sentenças “O estado do Amapá fica localizado na região Centro-oeste” e “Salvador é a capital do estado da Bahia”, todas as demais podem ser escritas utilizando-se símbolos matemáticos. De fato, podemos reescrever essas sentenças do seguinte modo:

(a) $\pi \in \mathbb{Q}$;

(b) $\frac{5}{3} < 2$;

(c) $4^2 \neq 16$;

(d) $-2 \in \mathbb{Q}$;

(e) $\frac{x}{4} = 4$.

As sentenças que podem ser escritas através de números, letras e símbolos matemáticos são denominadas **sentenças matemáticas**. Esse é o caso das sentenças (a), (b), (c), (d) e (e).

As sentenças podem ser de dois tipos: quando é possível dizer se a sentença é verdadeira ou falsa, dizemos que ela é uma **sentença fechada** ou **proposição**; caso contrário, dizemos que é uma **sentença aberta**. As sentenças (a), (b), (c), (d), (f) e (g) são fechadas. Já a sentença do item (e) é aberta. De fato, temos:

- $\pi \in \mathbb{Q}$ é falsa, pois π é um número irracional;
- $\frac{5}{3} < 2$ é verdadeira, pois $\frac{5}{3} < \frac{6}{3} = 2$;
- $4^2 \neq 16$ é falsa, pois $4^2 = 16$;
- $-2 \in \mathbb{Q}$ é verdadeira, pois $-2 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- "O estado do Amapá fica localizado na região Centro-oeste" é falsa, pois o Amapá fica na região Norte.
- "Salvador é a capital do estado da Bahia" é verdadeira.

Observação 1. *Tanto sentenças fechadas quanto abertas são frases declarativas. O que diferencia as sentenças fechadas das abertas é a possibilidade de dizer se a sentença é verdadeira ou falsa, sem espaço para uma terceira opção. Além disso, uma sentença fechada não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa. Sentenças como "João é alto" ou "Melissa é bonita" não são fechadas, por abrirem espaço para uma terceira opção ou por serem consideradas verdadeiras e falsas ao mesmo tempo. Os dois princípios abaixo têm o objetivo de excluir casos ambíguos como os que citamos acima.*

1. ***Princípio do terceiro excluído:*** *toda sentença fechada é verdadeira ou falsa, sendo excluída uma terceira opção.*
2. ***Princípio da não contradição:*** *uma sentença fechada não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

Quando uma sentença for verdadeira, diremos que seu ***valor lógico*** *é verdadeiro; quando ela for falsa, diremos que seu valor lógico é falso.*

Em relação à sentença $\frac{x}{4} = 4$, não há como dizer se ela é falsa ou verdadeira. Entretanto, se substituirmos x por 16, temos que

$$\frac{16}{4} = 4 \text{ é uma sentença verdadeira.}$$

Por outro lado, substituindo x por qualquer número diferente de 16, obtemos uma sentença falsa, pois a única solução da equação do primeiro grau $\frac{x}{4} = 4$ é 16. Assim, por exemplo, temos que

$$\frac{17}{4} = 4 \text{ é falsa}$$

e

$$\frac{12}{4} = 4 \text{ também é falsa.}$$

Outros exemplos de sentenças abertas são:

- $x^2 < 9$;
- $3a + 1 < 13$;
- $x^3 = 1$;
- $2x + y = 15$.

As letras (a, x e y) que aparecem nas sentenças abertas acima são denominadas **variáveis**. Atribuindo valores a essas variáveis, obtemos sentenças fechadas. Por exemplo,

- $4^2 < 9$ é falsa;
- $3 \cdot 2 + 1 < 13$ é verdadeira;
- $2^3 = 1$ é falsa;
- $2 \cdot 6 + 3 = 15$ é verdadeira.

Exemplo 2. *Quais das sentenças matemáticas abaixo são fechadas? Classifique cada uma delas como verdadeira ou falsa.*

(a) $\frac{6}{2}$ *é um número inteiro.*

(b) $3^4 < 4^3$.

(c) *A soma das medidas dos ângulos internos de um triêngulo é igual a* $360°$.

(d) $x^2 = 25$.

(*e*) *2 é o único número primo que é par.*

(*f*) $5x + 5y < 20$.

Solução. As sentenças dos itens (d) e (f) são sentenças abertas, pois não há como decidir se elas são verdadeiras ou falsas. Veja que é possível classificá-las em verdadeira ou falsa se atribuirmos valores às variáveis x e y. As demais sentenças são todas fechadas. Com efeito, $\frac{6}{2} = 3$ é um número inteiro, logo, a sentença do item (a) é verdadeira; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 > 64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, logo, $3^4 < 4^3$ é falsa; "A soma das medidas dos ângulos internos de um triêngulo é igual a 360°" é uma sentença falsa, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°; "2 é o único número primo que é par" é verdadeira, pois 2 é um primo par e todo número par diferente de 2 é múltiplo de 2, logo, não é primo. □

2 Quantificadores

Os **quantificadores** são utilizados para transformar sentenças abertas em sentenças fechadas. De fato, uma vez definido o conjunto numérico no qual as variáveis tomam valores, acrescentando à sentença termos como **"existe"** ou **"para todo"** é possível dizer se a nova sentença é verdadeira ou falsa. Por exemplo, se considerarmos o conjunto $\mathbb{R}$, podemos decidir se a sentença abaixo é verdadeira ou falsa:

$$\text{Existe } x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \frac{x}{4} = 4.$$

Como sabemos, esse x para o qual $\frac{x}{4} = 4$ é o número 16. Desse modo, concluímos que a sentença fechada acima é verdadeira. Portanto, quando acrescentamos o termo "existe" à sentença aberta $\frac{x}{4} = 4$, ela passou a ser uma sentença fechada. Em símbolos, denotamos o termo "existe" por $\exists$. Assim, a sentença pode ser reescrita como

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \frac{x}{4} = 4.$$

O símbolo $\exists$ recebe o nome de **quantificador existencial**.

Agora, considere a sentença aberta $x^2 \geq 0$. Vamos acrescentar o termo "para todo" x no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Desse modo, temos uma nova sentença:

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ temos } x^2 \geq 0.$$

A afirmação de que o quadrado de todo número real é maior do que ou igual a zero é verdadeira. Logo, a última sentença acima é verdadeira. Denotamos o termo "para todo" por $\forall$. Desse modo, podemos reescrever a última sentença como

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ temos } x^2 \geq 0.$$

O símbolo $\forall$ recebe o nome de **quantificador universal**.

Quando uma sentença aberta possuir mais de uma variável, poderemos combinar quantificadores para obtermos sentenças fechadas. Por exemplo, podemos transformar a sentença aberta $ax + b = 0$ em uma sentença fechada escrevendo: para todo número real a diferente de zero e todo número real b, existe um número real x tal que $ax + b = 0$. Em símbolos, temos

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall b \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } ax + b = 0.$$

Veja que essa é uma sentença verdadeira. De fato, se a e b são números reais com $a \neq 0$, então

$$ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3. *Utilize quantificadores para transformar as sentenças abertas abaixo em sentenças fechadas. Faça isso de modo que as quatro primeiras sejam transformadas em sentenças verdadeiras e as duas últimas em sentenças falsas.*

(a) x *é divisível por 3.*

(b) $x^2 + y^2 = 25.$

(c) $|x| \geq 0$.

(d) *y é um divisor de 18.*

(e) $x^2 > 0$.

(f) $4x - 1 = 13$.

Solução.

a) Vamos utilizar o quantificador $\exists$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ para transformar a sentença "x é divisível por 3" em uma sentença fechada verdadeira. Assim, obtemos "Existe um número natural x, tal que x é divisível por 3. Em símbolos,

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \text{ tal que } x \text{ é divisível por 3.}$$

Veja que essa é uma sentença verdadeira, pois, por exemplo, 6 é um número natural que é divisível por 3. Se o quantificador $\forall$ fosse utilizado, em vez de $\exists$, a sentença passaria a ser falsa (reflita sobre isso!).

b) Neste item, vamos utilizar dois quantificadores existenciais no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$:

$$\exists\, x \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z}, \text{ tais que } x^2 + y^2 = 25.$$

Essa é uma sentença verdadeira, pois tomando $x = 3$ e $y = 4$ temos que $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

c) Utilizando o quantificador universal $\forall$ em $\mathbb{Z}$, obtemos:

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \text{ temos } |x| \geq 0,$$

que é uma sentença verdadeira, pois, como sabemos, o módulo de qualquer número inteiro é maior ou igual a zero.

d) Fazendo uso do quantificador existencial $\exists$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, obtemos

$$\exists\, y \in \mathbb{N}, \text{ tal que } y \text{ é divisor de 18.}$$

Essa sentença é verdadeira, pois cada um dos números naturais pertencentes ao conjunto $D = \{1,2,3,6,9,18\}$ é divisor de 18. Outro modo de obtermos uma sentença fechada, mas agora utilizando o quantificador universal, é trocar o conjunto $\mathbb{N}$ por D. De fato, a sentença

$$\forall\, y \in D, \text{ temos } y \text{ é divisor de } 18$$

é verdadeira.

e) Com o auxílio do quantificador universal em $\mathbb{R}$, obtemos a sentença fechada

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ temos } x^2 > 0,$$

que é falsa, pois 0 é um número real para o qual não vale $x^2 > 0$.

f) Mais uma vez utilizando o quantificador universal $\forall$ em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ temos } 4x - 1 = 13,$$

que é uma sentença falsa, pois há somente um número real x para o qual vale $4x - 1 = 13$, que é $x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. Se mudarmos o quantificador para $\exists$ e o conjunto para $\mathbb{Z}$, a sentença

$$\exists\, x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 4x - 1 = 13$$

continua falsa, pois $x = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. No exemplo 3, proponha aos alunos mudanças — nos quantificadores e nos conjuntos — que mudem os valores lógicos das sentenças.

A referência a seguir contém muitos exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. C. de Morais Filho *Um convite à Matemática*. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2016.