Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Exercícios

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Nesta aula, apresentaremos exemplos e resolveremos exercícios envolvendo a noção de função e suas propriedades básicas, as quais foram estudadas na aula *Funções - Noções Básicas*, partes 1 e 2.

1 Definição de função

Exemplo 1. *Quantas funções* $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ *existem?*

Solução: os valores de $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ podem ser $1, 2, 3$ ou 4. Dessa forma, temos quatro possibilidades para a imagem de cada um dos três elementos do domínio. Para cada escolha de uma dessas quatro possibilidades para $f(1)$, temos quatro possibilidades para $f(2)$. Para cada uma das $4 \times 4 = 16$ escolhas de $f(1)$ e $f(2)$, temos ainda 4 possibilidades para $f(3)$.

Portanto, há um total de $4 \times 4 \times 4 = 64$ funções entre os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplo 2. *Considere a função* $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, dada por* $s(a, b) = a + b$*. Essa função associa cada par* (a, b) *de números naturais à sua soma* $a + b$*. Em geral, se* A *é um conjunto não vazio e* $b : A \times A \to A$ *é uma função dada, dizemos que* b *é uma* **operação binária** *definida sobre* A*.*

As operações de adição, multiplicação, subtração e divisão são operações binárias, mas elas nem sempre estão bem definidas sobre um determinado conjunto. Nesse sentido, pergunta-se:

(1) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, dada por* $f(a, b) = a - b$*, é uma função?*

(2) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $g(x, y) = \dfrac{x}{y}$*, é uma função?*

Solução: (1) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(a, b) = a - b$ *não* é uma função, pois existem elementos do domínio que não têm imagem. Por exemplo, $f(1, 2) = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$, logo $(1, 2)$ não tem imagem.

(2) Uma vez que a divisão por 0 não tem sentido matemático, g não está definida para pares ordenados do tipo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Em particular, g não é função.

2 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

O problema a seguir é um desdobramento do exemplo 1.

Exemplo 3. *Quantas funções injetivas* $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ *existem?*

Solução: podemos escolher $f(1)$ como um qualquer dos quatro elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$. Feita essa escolha, o elemento do contradomínio que foi escolhido não pode ser imagem de outro elemento do domínio, pois f deve ser injetiva. Logo, restam três opções para $f(2)$ (qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, exceto aquele escolhido para ser $f(1)$). Analogamente, uma vez escolhidos $f(1)$ e $f(2)$, sobram duas opções para $f(3)$. Portanto, a quantidade de funções injetivas de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$ é $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Exemplo 4. *Seja* $f : A \to B$ *uma função sobrejetiva. Se* $b \in B$*, denotamos por* $f^{-1}(b)$ *o conjunto formado por todos os elementos de* A *cuja imagem é* b*, ou seja,*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

(1) *Mostre que* $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ *e, se* $b \neq b'$*, então* $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$*.*

(2) *Mostre que* A *é igual à união de todos os conjuntos* $f^{-1}(b)$*, com* $b \in B$*.*

(3) *Se* $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$ *é dada por* $f(n) = r$*, onde* r *é o resto da divisão de* n *por 3, explicite* $f^{-1}(0)$*,* $f^{-1}(1)$ *e* $f^{-1}(2)$*.*

Solução: (1) Inicialmente, como f é sobrejetiva, para cada $b \in B$ deve existir pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como tal elemento a, por definição, pertence ao conjunto $f^{-1}(b)$, temos $f^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Se existisse $x \in f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b')$, teríamos $f(x) = b$ e $f(x) = b'$, logo, $b = b'$. Mas, como $b \neq b'$, concluímos que não pode existir um elemento nessa interseção, ou seja, $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$.

(2) Se $x \in A$, então $f(x) \in B$. Denotando $f(x)$ por b, temos $x \in f^{-1}(b)$. Isso significa que A está contido na união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$.

Por outro lado, uma vez que para cada $b \in B$ o conjunto $f^{-1}(b) \subset A$, concluímos que a união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$, está contida em A.

Portanto A é *igual* à união dos conjuntos do tipo $f^{-1}(b)$, com $b \in B$.

(3) O conjunto $f^{-1}(0)$ é formado pelos números inteiros que deixam resto 0 quando divididos por 3, isto é, o conjunto dos múltiplos de 3. Assim,

$$f^{-1}(0) = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

O conjunto $f^{-1}(1)$ é formado pelos inteiros que deixam resto 1 quando divididos por 3, ou seja,

$$f^{-1}(1) = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalmente, o conjunto $f^{-1}(2)$ é formado pelos inteiros que deixam resto 2 quando divididos por 3, de sorte que

$$f^{-1}(2) = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Vale observar que $\mathbb{Z} = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2)$, o que significa dizer que todo número inteiro pode ser escrito em uma das três formas: $3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 5. *Se $f : A \to B$ é uma função injetiva e $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ é a imagem de f, então $f : A \to f(A)$ é uma função bijetiva. Neste caso, podemos identificar o conjunto A com sua imagem $f(A)$, o que equivale a ver A como um subconjunto do conjunto B. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x, 0)$.*

(1) *A função f é injetiva?*

(2) *Encontre a imagem de f.*

(3) *Existem outras maneiras de identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?*

Solução: (1) Se x e x' são números reais tais que $f(x) = f(x')$, então $(x, 0) = (x', 0)$, logo, $x = x'$. Isso significa que a função f é injetiva.

(2) A imagem de f é o conjunto $f(\mathbb{R}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto é uma reta no plano cartesiano, que coincide com o eixo das abscissas.

(3) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $g(x) = (0, x)$, é uma identificação de $\mathbb{R}$ com uma reta vertical, que coincide com o eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (x, ax + b)$, é uma função injetiva (verifique isso!), cuja imagem é uma reta no plano cartesiano.

Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função, então $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (x, f(x))$, é uma função injetiva. Logo, $\mathbb{R}$ pode ser identificado com o gráfico de f, com cada elemento $x \in \mathbb{R}$ sendo identificado com o ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3 Função real de variável real

Exemplo 6. *Uma função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada* **função par** *se $P(-x) = P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada* **função ímpar** *se $J(-x) = -J(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

(1) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, mostre que $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é uma função par.*

(2) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, mostre que $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $J(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é uma função ímpar.*

(3) *Mostre que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita, de maneira única, como a soma de uma função par com uma função ímpar: $f(x) = P(x) + J(x)$, com P par e J ímpar.*

Solução: (1) Para verificarmos que P é uma função par, vamos calcular $P(-x)$:

$$P(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = P(x).$$

Logo, $P(-x) = P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e P é uma função par.

(2) Assim como no item anterior, devemos calcular $J(-x)$:

$$\begin{aligned} J(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -J(x). \end{aligned}$$

Assim, $J(-x) = -J(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que significa que J é uma função ímpar.

(3) Para a possibilidade de escrever f como a soma de uma função par com uma função ímpar, basta notar que

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = P(x) + J(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelos itens anteriores, sabemos que P é uma função par e J é uma função ímpar.

Para a unicidade da representação de f como soma de uma função par com uma função ímpar, seja $f = g + h$, com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

e

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

Somando e subtraindo membro a membro as duas igualdades acima, obtemos respectivamente

$$f(x) + f(-x) = 2g(x) \quad \text{e} \quad f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = P(x)$$

e

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = J(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = P$ e $h = J$.

Exemplo 7. *Todo número real está em um único intervalo* semiaberto à direita *limitado por dois números inteiros consecutivos. Em símbolos, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Esse inteiro n é chamado de* **parte inteira** *de x e é denotado por $\lfloor x \rfloor$. A* **parte fracionária** *de um número real x, denotada por $\{x\}$, é a parte não inteira de x, isto é, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \{x\}$.*

(1) *Calcule $f\left(\frac{11}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{7}\right)$ e $f(\pi)$.*

(2) *Mostre que $f(x) = 0$ exatamente quando x é inteiro.*

(3) *Mostre que $0 \leq f(x) < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Solução: (1) Como $\frac{11}{4} = 2,75$, a parte inteira de $\frac{11}{4}$ é 2 e a parte fracionária de $\frac{11}{4}$ é $2,75 - 2 = 0,75$. A representação decimal de $\frac{1}{7}$ é periódica, o que significa que os algarismos dessa representação se repetem: $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$. A parte inteira de $\frac{1}{7}$ é 0 e sua parte fracionária é $0,142857\ldots$, ou seja, $f\left(\frac{1}{7}\right) = 0,142857\ldots = \frac{1}{7}$. O número π é irracional, sendo

$$\pi \cong 3,14159265359\ldots$$

sua representação decimal com 11 casas decimais corretas. Assim, a parte inteira de π é 3 e sua parte fracionária é

$$f(\pi) \cong 0,14159265359\ldots$$

(2) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n \leq n < n+1$, de sorte que $\lfloor n \rfloor = n$. Também, sua parte fracionária é zero, pois

$$f(n) = n - \lfloor n \rfloor = n - n = 0.$$

Reciprocamente, se $f(x) = 0$, então $\{x\} = 0$ e, daí,

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

(3) Observe que, se $n = \lfloor x \rfloor$, então $n \leq x < n+1$; logo, $0 \leq x - n < 1$. Mas, como

$$x - n = x - \lfloor x \rfloor = \{x\} = f(x),$$

temos que $0 \leq f(x) < 1$.

Exemplo 8. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* **periódica***, se existe $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, tal que $f(x+a) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, quando existe, é chamado de* **período** *da função f. A esse respeito, faça os seguintes itens:*

(1) *Mostre que a função f dada no exemplo 7, que associa a cada número real x a sua parte fracionária $\{x\}$, é uma função periódica de período 1.*

(2) *Seja $d : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, a* **função de Dirichlet***, dada por*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que d é periódica, mas não tem período.

Solução: (1) Primeiro, vamos mostrar que $f(x+1) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, seja $n = \lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x. Sabemos que n é o único número inteiro tal que $n \leq x < n+1$. Somando 1 a essas desigualdades, obtemos $n+1 \leq x < n+2$, o que nos leva a concluir que $\lfloor x+1 \rfloor = n+1$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \{x+1\} = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= (x+1) - (n+1) = x - n \\ &= x - \lfloor x \rfloor = \{x\} = f(x). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que não existe $0 < a < 1$ tal que $f(x+a) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para tanto, considere $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1-a < 1$. Então, $0 < a < x+a < 1$ e, como ambos x e $x+a$ estão entre 0 e 1, a parte inteira de ambos é igual a 0. Logo, $f(x) = x$ e $f(x+a) = x+a$. Mas, uma vez que $a \neq 0$, temos $x + a \neq x$, ou seja, $f(x+a) \neq f(x)$, o que mostra que a não pode ser um período de f.

(2) Se r é um número racional, então

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + r \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + r \notin \mathbb{Q}.$$

Assim, $d(x+r) = d(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e isso mostra que qualquer número racional positivo r é um período de d. Entretanto, uma vez que existem números racionais positivos tão pequenos quanto queiramos (por exemplo $1/n$, com n natural), concluímos que não há um valor mínimo para r. Assim, a função d não tem período.

4 Composição de funções

Exemplo 9. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2 - 1$. A* **órbita** *de um elemento $a \in \mathbb{R}$ em relação à função f é o conjunto*

$$\mathcal{O}(a) = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}.$$

Para facilitar a escrita, podemos usar a seguinte notação: $f^1(a) = f(a)$, $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f(f(a)))$ etc, de modo que, para $n \in \mathbb{N}$, $f^n(a)$ é o resultado da aplicação sucessiva da função f, n vezes, sobre o número a. Com tal notação, temos $\mathcal{O}(a) = \{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots\}$.

A esse respeito, faça os seguintes itens:

(1) *Calcule $\mathcal{O}(0) = \{0, f(0), f^2(0), f^3(0), \ldots\}$.*

(2) *Calcule*

$$\mathcal{O}\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \Big\{-\frac{1}{2}, f\Big(-\frac{1}{2}\Big), f^2\Big(-\frac{1}{2}\Big), f^3\Big(-\frac{1}{2}\Big), \ldots\Big\}.$$

(3) *Calcule $\mathcal{O}(2) = \{2, f(2), f^2(2), f^3(2), \ldots\}$.*

(4) *Encontre $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{O}(a) = \{a\}$, isto é, $f^n(a) = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: (1) Vamos calcular os valores da função f nos pontos indicados:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1; \quad f^2(0) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

A partir de $f^3(0) = f(0) = -1$ haverá uma repetição dos valores, que se alternarão entre 0, se houver um número par de funções, e -1, se houver um número ímpar de funções. Desse modo, a órbita de 0 é o conjunto $\mathcal{O}(0) = \{0, -1\}$.

Quando $\mathcal{O}(a)$ é um conjunto finito e não ocorre $f^{n+1}(a) = f^n(a)$ para $n > 1$, dizemos que a órbita de a é

periódica. No nosso caso, a órbita de 0 é periódica.

(2) Repetindo o que fizemos no item (1), vamos calcular os valores de f nos pontos indicados:

$$f(1/2) = (1/2)^2 - 1 = -3/4 = -0,75;$$

$$f(f(1/2)) = f(-3/4) = (-3/4)^2 - 1 = -7/16 = -0,4375;$$

$$\begin{aligned} f(f(f(1/2))) &= f(-7/16) = (-7/16)^2 - 1 = 49/256 - 1 \\ &= -207/256 \approx -0,8085. \end{aligned}$$

Continuando a calcular esses valores, obtemos

$$\mathcal{O}(-1/2) = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{16}, -\frac{207}{256}, -\frac{22687}{65536}, \dots\right\}.$$

(Veja a figura abaixo.)

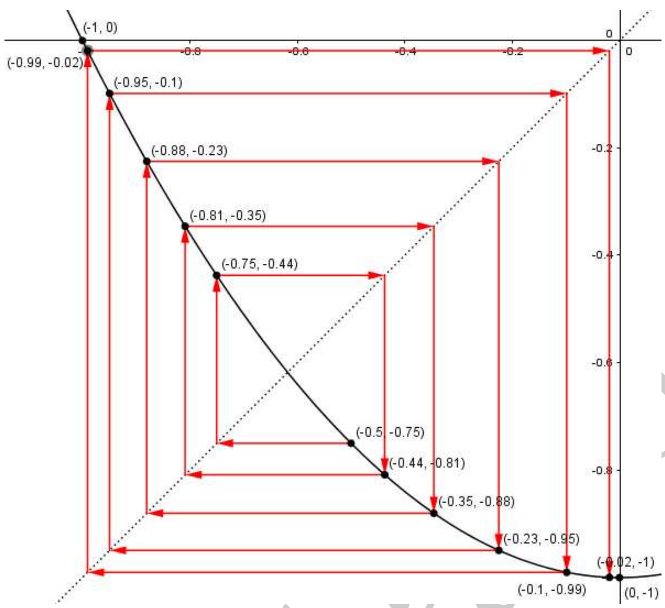

Figura 1: pontos sobre o gráfico de f correspondentes à órbita de $-1/2$ em relação a f.

A figura acima deixa claro que a órbita $\mathcal{O}(-1/2)$ não é periódica, mas os valores $f^n(-1/2)$ estão sempre entre -1 e 0 e se aproximam, à medida que n cresce, de 0 quando n é par, e de -1 quando n é ímpar. Na figura 1, as setas vermelhas indicam a ordem em que aparecem os pontos do gráfico de f cujas abscissas são os elementos de $\mathcal{O}(-1/2)$.

(3) Neste caso, a órbita não é periódica e tampouco limitada. Os valores de $f^n(2)$ crescem rapidamente com n:

$$\mathcal{O}(2) = \{2, 3, 8, 63, 3968, 15745023, 247905749270528, \dots\}$$

(4) Para que $f^n(a) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é suficiente que $f(a) = a$, pois, sendo este o caso, teremos

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a,$$

$$f^3(a) = f(f^2(a)) = f(a) = a$$

e assim por diante.

Um elemento a do domínio de f tal que $f(a) = a$ é chamado **ponto fixo** de f.

Da igualdade $f(a) = a$ segue que $a^2 - 1 = a$, ou seja, $a^2 - a - 1 = 0$. Resolvendo essa equação, encontramos

$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Estes são os dois pontos fixos da função f.

5 Função inversa

Exemplo 10. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, qual é a condição para que a função $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, seja invertível? Neste caso, exiba a inversa de f.*

Solução: suponha que existe uma inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da função f. Sabemos que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que $ag(x) + b = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$, podemos escrever $g(x) = \frac{x-b}{a}$. Se $a = 0$, a função $f(x) = b$ é constante, logo não é bijetiva e por isso não tem inversa.

Assim, a condição para que f tenha inversa é que a seja diferente de 0. Sendo esse o caso, a inversa de f é a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}.$$

Exemplo 11. *Seja $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$, é sobrejetiva. Exiba duas inversas de f à direita.*

Solução: as funções $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dadas por $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = -\sqrt{x}$ para $x \geq 0$, são tais que

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

e

$$f(h(x)) = (h(x))^2 = (-\sqrt{x})^2 = x$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+$, ou seja, $f \circ h = I_{\mathbb{R}_+}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{R}_+}$. Assim, g e h são inversas à direita de f.

Exemplo 12. *Dizemos que uma função $f : A \to A$ é uma* **involução** *se $f \circ f = I_A$, ou seja, se f for igual à sua inversa. A função identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, é uma involução. Existe alguma outra involução $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?*

Solução: a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x$, é uma involução, pois $f(f(x)) = -(-x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 13. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(f(f(x))) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é bijetiva.*

Solução: a hipótese de que $f(f(f(x))) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ garante que $f \circ f \circ f = I$, onde $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, é a função identidade.

A composição de funções $f \circ f \circ f$ pode ser escrita de duas maneiras: $f \circ (f \circ f)$ e $(f \circ f) \circ f$, por conta da associatividade da composição de funções.

A partir de $f \circ (f \circ f) = I$, segue que f tem $f \circ f$ como inversa à direita. Logo, f é sobrejetiva. Por outro lado, de $(f \circ f) \circ f = I$ segue que f tem $f \circ f$ como inversa à esquerda. Logo, f é injetiva.

Portanto, f é bijetiva.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula de modo superficial. Caso você queira se deter um pouco mais em alguns exemplos, precisará de um pouco mais de tempo.

Cada exercício resolvido nesta aula aponta para um caminho que pode ser seguido em direção a uma parte mais avançada da Matemática. Você pode explorar um pouco mais cada um desses exercícios, ou aqueles que preferir, de modo a apresentar aos seus alunos alguns assuntos mais avançados, com maior ou menor profundidade, dependendo do nível da turma.

Como ilustração, vamos observar um pouco melhor o exemplo 9. Você pode substituir a função dada nesse exemplo por outras, e testar o comportamento das iterações $f^n(a)$, com $a \in \mathbb{R}$. Por exemplo, os pontos fixos da função dada por $f(x) = x^3$ são $-1, 0$ e 1. Nenhum dos outros pontos tem órbita periódica. Se $f(x) = x^2$, então os pontos fixos de f são 0 e 1, e $\mathcal{O}(-1) = \{-1, 1\}$. Entretanto, a órbita de -1 não é periódica, porque $f^n(-1) = 1$ para todo $n \geq 2$, de modo que os valores de $f^n(-1)$ não oscilam entre -1 e 1, mas se estabilizam com valor 1 a partir da segunda iteração.

Você pode comentar, de maneira informal, que a maioria das funções com as quais trabalhamos no ensino básico (e mesmo nos cursos de Cálculo) são *contínuas*. De um modo intuitivo, uma função f é contínua se pequenas variações de x provocam pequenas variações de $f(x)$.

Para funções contínuas temos alguns resultados interessantes: o *Teorema de Brouwer*, elaborado pelo matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), em um caso particular que está ao nosso alcance, afirma o seguinte: se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma função contínua, então f tem um ponto fixo (o Teorema de Brouwer é bem mais geral).

Um resultado apresentado em 1964 pelo matemático ucraniano Oleksandr Mykolaiovych Sharkovsky (1936 -) diz que, se uma função contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ tem algum ponto cuja órbita é periódica e tem três elementos, então essa função tem pontos com órbitas periódicas de comprimento n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, esses resultados não podem ser demonstrados para alunos do ensino básico, mas é possível admirar sua beleza, mesmo sem estudarmos suas demonstrações.

As referências abaixo contém muitos problemas adicionais sobre funções, de variados graus de dificuldade.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 1. Atual Editora, São Paulo, 2013.