Material Teórico - Módulo Inequações Mistas e Sistemas

Sistemas mistos de inequações

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

24 de agosto de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Sistemas mistos

Neste material, mais uma vez utilizaremos os conhecimentos adquiridos nos módulos sobre inequações de primeiro e segundo graus, agora para estudar sistemas mistos, ou seja, que envolvem inequações de primeiro e segundo graus. Iniciamos com o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Resolva, em* $\mathbb{R}$, *o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

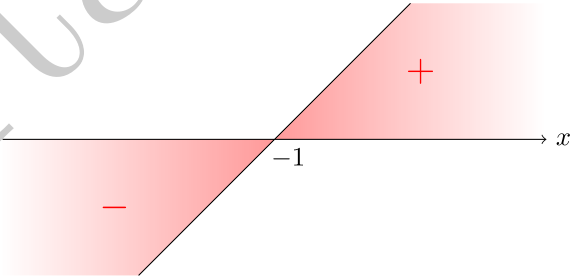
Solução. Como nosso interesse é o de encontrar todos os números reais x que satisfaçam as duas inequações simultaneamente, o **conjunto-verdade** do sistema é dado pela interseção dos conjuntos-verdade das inequações que o formam.

Desse modo, repetindo o procedimento feito nos módulos sobre inequações produto e quociente, vamos analisar, separadamente, os sinais da função afim $f(x) = x + 1 \geq 0$ e da função quadrática $g(x) = x^2 - 1$.

Veja que

$$x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1.$$

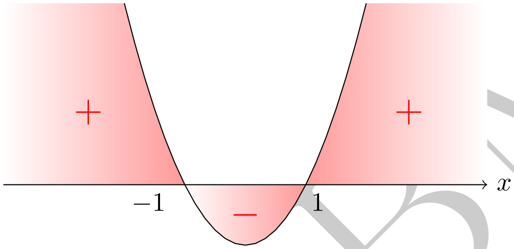
Logo, $f(x)$ tem raiz igual a -1. Além disso, como a taxa de variação de f é igual a 1 (que é um número real positivo), temos que f é crescente. Daí, o gráfico de f é uma reta que tem a seguinte forma:



Por outro lado, temos que

$$g(x) = x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1).$$

Assim, g possui raízes iguais a -1 e 1 e, uma vez que o coeficiente de x^2 na expressão algébrica que define g é 1, que é um número positivo, o gráfico de g é uma parábola côncava para cima. A próxima figura esboça esse gráfico.

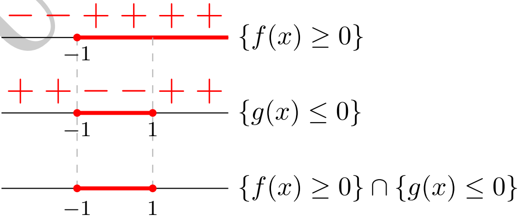


No diagrama seguinte, destacamos os conjuntos-verdade das inequações $x+1 \geq 0$ e $x^2 - 1 \leq 0$. Recordando que a interseção desses dois conjuntos é o conjunto-verdade do sistema, concluímos que o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

é o conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1].$$



□

Exemplo 2. *Resolva o sistema abaixo em* $\mathbb{R}$*:*

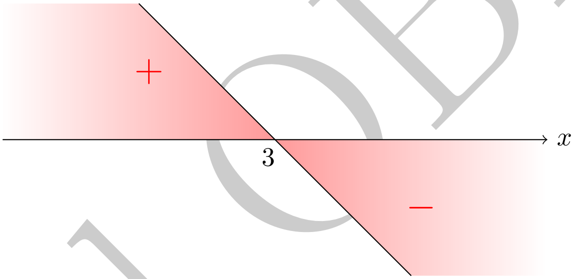
$$\begin{cases} -x+3<0 \\ -x^2+4x>0 \end{cases}.$$

Solução. Faremos um estudo dos sinais das funções $f(x) = -x+3$ e $g(x) = -x^2+4x$ separadamente.

Temos que

$$-x+3=0 \Longleftrightarrow x=3.$$

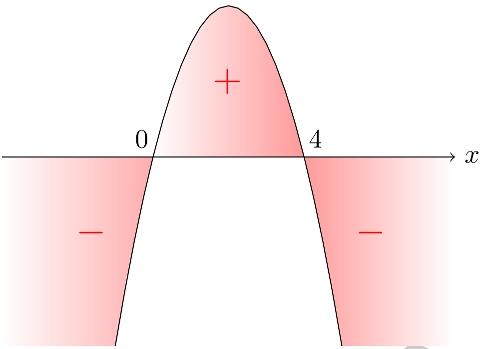
Desse modo, $f(x)$ tem raiz igual a 3. Além disso, como a taxa de variação de f é igual a -1 (que é um número real negativo), temos que f é decrescente. Logo, o gráfico de f é uma reta que tem a seguinte forma:



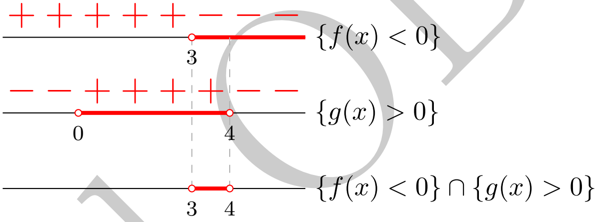
Por outro lado, temos

$$g(x) = -x^2+4x = -x(x-4).$$

Assim, $g(x)$ possui raízes 0 e 4 e seu gráfico é uma parábola côncava para baixo, pois o coeficiente de x^2 em $-x^2+4x$ é igual a -1.



No próximo diagrama podemos ver, em destaque, os conjuntos-verdade das inequações $-x+3<0$ e $-x^2+4x>0$. A interseção dos dois é o conjunto-verdade do sistema.



Desse modo, obtemos que o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} -x+3<0 \\ -x^2+4x>0 \end{cases}$$

é igual a

$$V=(3{,}4).$$

□

Exemplo 3. *Encontre o conjunto-verdade do seguinte sistema de inequações em* $\mathbb{R}$*:*

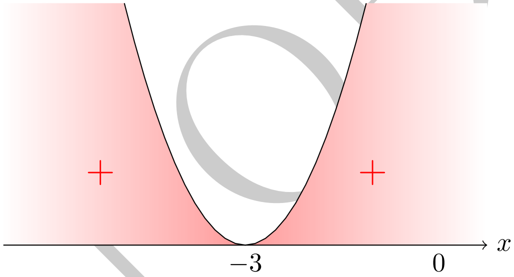
$$\begin{cases} x^2+6x+9>0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}.$$

Solução. Repetindo o procedimento feito nos exemplos anteriores, vamos analisar, separadamente, os sinais da função quadrática $f(x) = x^2 + 6x + 9$ e da função afim $g(x) = x + 3 \geq 0$.

Primeiramente, uma vez que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 9 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= (x+3)^2, \end{aligned}$$

$f(x)$ tem uma única raiz igual a -3. Além disso, o coeficiente de x^2 em $x^2 + 6x + 9$ é igual a 1, que é positivo, o que nos permite concluir que o gráfico de f é uma parábola côncava para cima. Veja um esboço do gráfico de f na figura abaixo:

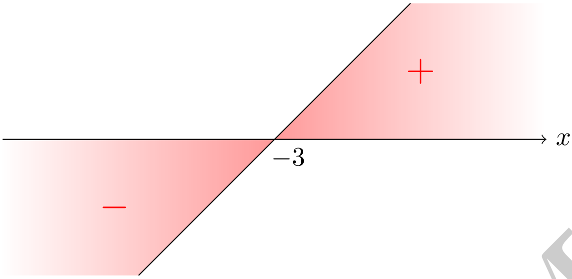


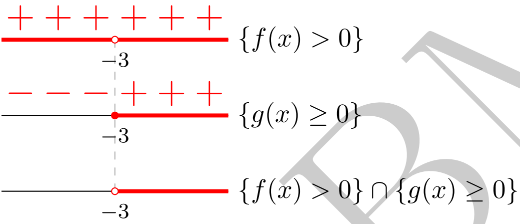
Agora, veja que

$$g(x) = x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3.$$

Desse modo, $g(x)$ tem raiz igual a -3. Além disso, como a taxa de variação de g é igual a 1, que é positivo, temos que g é crescente. Logo, o gráfico de g é uma reta que tem a seguinte forma:

No diagrama abaixo, vemos em destaque, os conjuntos-verdades das inequações $x^2 + 6x + 9 > 0$ e $x + 3 \geq 0$, além do conjunto-verdade do sistema:





Desse modo, o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

é

$$V = (-3,\infty).$$

$\square$

Exemplo 4. *Resolva o seguinte sistema em* $\mathbb{R}$*:*

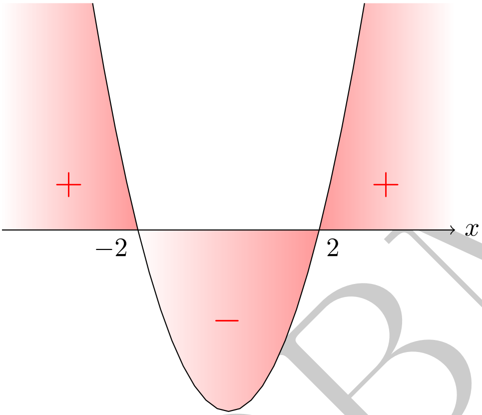
$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases}.$$

Solução. Mais uma vez, começaremos analisando os sinais das funções $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 2x - 7$.

Fatorando a expressão de $f(x)$ para encontrar suas raízes, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4 \\ &= x^2 - 2^2 \\ &= (x+2)(x-2) \end{aligned}$$

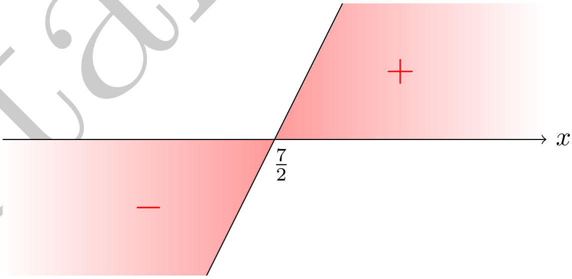
Assim, $f(x)$ possui raízes iguais a -2 e 2. Como o coeficiente de x^2 de $f(x)$ é 1, o gráfico de f é uma parábola que possui concavidade voltada para cima, logo, tem a seguinte forma:



Por outro lado,

$$g(x) = 2x - 7 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{7}{2},$$

donde concluímos que $g(x)$ possui raiz igual a $\frac{7}{2}$. Além disso, a taxa de variação de $g(x)$ é igual a 2, logo, g é crescente. Podemos ver um esboço do gráfico de g na figura abaixo.



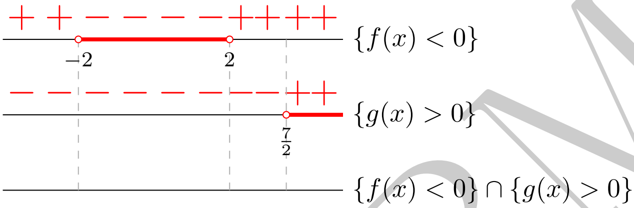
No diagrama a seguir, obtemos o conjunto-verdade do sistema a partir dos conjuntos-verdade de $f(x) < 0$ e de

$g(x) > 0$. Desse modo, obtemos que o conjunto-verdade do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases}$$

é igual a

$$V = \emptyset.$$



$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Assim como nos materiais sobre inequações produto e quociente do segundo grau, inequações mistas e sistemas de inequações do segundo grau, em geral aqui também optamos por não utilizar fórmulas prontas para encontrar as raízes das funções quadráticas que foram tratadas. Recomendamos que o professor proponha aos alunos que tentem encontrar as raízes utilizando outros métodos.

O professor também deve chamar a atenção dos alunos para o fato de que as extremidades dos intervalos que compõem o conjunto-verdade devem ser excluídas deste conjunto quando a inequação for estrita.

As leituras complementares a seguir contêm material adicional sobre inequações envolvendo funções quadráticas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 1*: Números Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.