

Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Números Irracionais e Reais

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente



1 Os números irracionais

Ao longo deste módulo, vimos que a representação decimal de um número racional pode ser finita ou infinita. No segundo caso, a representação decimal se dá por meio de dízimas periódicas. Pode-se mostrar que quando dividimos o numerador pelo denominador de uma fração, com o objetivo de encontrar a sua representação decimal, sempre encontramos um decimal finito ou uma dízima periódica. Agora, observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1. *O número cuja representação decimal é $0,01001000100001\dots$, onde em cada passo acrescenta-se um zero a mais entre dois algarismos um, não é uma dízima periódica, pois há sequências tão grandes quanto queiramos, formadas somente por algarismos iguais a zero e contidas na sua parte decimal. Portanto, esse número não é a representação decimal de um número racional.*

Podemos concluir que há representações decimais que não têm como origem um número racional. Um **número irracional** é um número que possui representação decimal infinita e não periódica. O número dado no exemplo 1, cuja representação decimal é $0,01001000100001\dots$, é, portanto, um número irracional.

Exemplo 2. *Considere um quadrado de lado igual a 1cm, como na figura 1.*

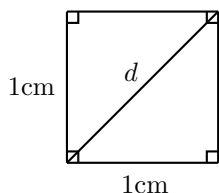


Figura 1: O número irracional $\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, sua diagonal satisfaz $d^2 = 2$. Afirmamos que tal número não pode ser racional. De fato, se tivéssemos $d = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$, então $p^2 = d^2 q^2$, donde $p^2 = 2q^2$. Mas, como todo quadrado tem um número par de fatores iguais a 2, concluímos, a partir dessa igualdade, que deveríamos ter um número par de fatores 2 do lado esquerdo da igualdade e um número ímpar de fatores 2 do lado direito; isso não pode acontecer, pois o modo como fatoramos um natural maior que 1 como um produto de números primos é único.

O número d é chamado raiz quadrada de 2 e é denotado por $\sqrt{2}$.

Uma pergunta que surge a essa altura é: qual é a representação decimal de $\sqrt{2}$? Para responder a essa pergunta, precisamos de propriedades que serão discutidas na seção 2.

Exemplo 3. *Outro número irracional que merece atenção é o número π , definido como o quociente entre a circunferência de um círculo e o comprimento de seu diâmetro. Embora a irracionalidade de π seja um fato bem conhecido, uma justificativa desse fato não é elementar e está fora dos objetivos desse material. Registramos que*

$$\pi = 3,14159\dots,$$

onde, no segundo membro acima, os cinco algarismos mostrados após a vírgula são os corretos. Nesse caso, escrevemos também

$$\pi \cong 3,14159,$$

e dizemos que 3,14159 aproxima π com cinco casas decimais corretas.

2 Os números reais

O **conjunto dos números reais**, que é denotado por \mathbb{R} , é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Os elementos de \mathbb{R} são chamados **números reais**.

Pode-se mostrar que, no conjunto dos números reais, a extração de raízes de números naturais sempre tem sentido. Assim, dados inteiros positivos m e n , escrevemos $\sqrt[n]{m}$ para denotar o número real que, elevado a n , dá, como resultado, o número m :

$$(\sqrt[n]{m})^n = m.$$

Por exemplo, $\sqrt[3]{5}$ é o número real que, elevado ao cubo, é igual a 5; em símbolos, $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$.

Também pode ser mostrado que ou m é uma n -ésima potência perfeita e, neste caso, $\sqrt[n]{m}$ é um número inteiro, ou então (generalizando o exemplo 2) $\sqrt[n]{m}$ é um número irracional. Esse é o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{5}$: como 5 não é um cubo perfeito, concluímos que $\sqrt[3]{5}$ é um número irracional.

O conjunto \mathbb{R} possui operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, que são extensões das operações conhecidas em \mathbb{Q} e, além disso, satisfazem as mesmas propriedades que satisfazem em \mathbb{Q} . A relação de ordem conhecida em \mathbb{Q} também se estende a \mathbb{R} , satisfazendo as mesmas propriedades que satisfaz em \mathbb{Q} .

Mais precisamente, as operações de adição $+$ e multiplicação \cdot de \mathbb{Q} se estendem a \mathbb{R} e possuem as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) As operações $+$ e \cdot são **comutativas**, isto é,

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Por exemplo, $3 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3$ e $3 \cdot \pi = \pi \cdot 3$.

(ii) As operações $+$ e \cdot são **associativas**, isto é,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Por exemplo, $(\sqrt{2} + \frac{1}{3}) + 5 = \sqrt{2} + (\frac{1}{3} + 5)$ e $(\sqrt[3]{8} \cdot \frac{3}{5}) \cdot 3 = \sqrt[3]{8} \cdot (\frac{3}{5} \cdot 3)$.

(iii) A operação \cdot é **distributiva** em relação à operação $+$, isto é,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Por exemplo, $4 \cdot (\sqrt{3} + 7) = (4 \cdot \sqrt{3}) + (4 \cdot 7)$.

(iv) Os números 0 e 1 são, respectivamente, os **elementos neutros** para as operações $+$ e \cdot . Isso significa que

$$a + 0 = a \text{ e } a \cdot 1 = a,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $\pi + 0 = \pi$ e $\sqrt[5]{25} + 0 = \sqrt[5]{25}$.

(v) Dado $a \in \mathbb{R}$, existe um único número real, o qual denotamos por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Além disso, se $a \neq 0$, então também existe um único número real, que é denotado por a^{-1} , tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Os números reais $-a$ e a^{-1} são chamados, respectivamente, de **oposto** (ou **simétrico**) e **inverso** de a . Também denotamos o inverso de a por $\frac{1}{a}$, sempre que for conveniente. Por exemplo, o oposto de $\sqrt{8}$ é $-\sqrt{8}$ e o seu inverso é $\sqrt{8}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Podemos definir as operações de subtração e divisão de números reais, respectivamente, por

$$a - b = a + (-b) \text{ e } a \div b = a \cdot b^{-1}.$$

Observe que $a \div b$ só faz sentido se $b \neq 0$.

Para $a, b \in \mathbb{R}$ escrevemos $a \geq b$ para denotar que a é **maior do que ou igual a** b . Esta é a relação de ordem em \mathbb{R} , a qual, conforme já mencionamos, estende a relação de ordem em \mathbb{Q} . Escrevemos também $a \leq b$ com o mesmo sentido de $b \geq a$, mas, neste caso, lemos a é **menor do que ou igual a** b .

Escrevemos ainda $a > b$ para denotar que a é **maior do que** b , isto é, que $a \geq b$ e $a \neq b$; por fim, escrevemos $a < b$ para denotar que a é **menor do que** b , isto é, que $a \leq b$ e $a \neq b$.

Se $a > 0$, dizemos que a é **positivo** e, se $a < 0$, dizemos que a é **negativo**.

A relação de ordem \geq em \mathbb{R} satisfaz as propriedades abaixo, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a + b > 0$ e $a \cdot b > 0$.

(ii) Para $a, b \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $a > b$, $a < b$ ou $a = b$.

(iii) $a > b$ se, e somente se, $a - b > 0$.

(iv) Se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

(v) Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$.

(vi) Se $a \geq b$, então $a + c \geq b + c$.

(vii) Se $a \geq b$ e $c > 0$, então $a \cdot c \geq b \cdot c$. Por outro lado, se $a \geq b$ e $c < 0$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Sejam dados dois reais $a, b > 0$. Se $a > b$, então, utilizando sucessivamente as propriedades (vii) e (v), obtemos

$$a > b > 0 \implies a \cdot a > b \cdot a \text{ e } a \cdot b > b \cdot b \\ \implies a^2 > ab \text{ e } ab > b^2 \implies a^2 > b^2.$$

Reciprocamente, sejam $a, b > 0$ tais que $a^2 > b^2$. Então, $a \neq b$, de forma que, pela propriedade (ii), $a > b$ ou $a < b$. Se fosse $a < b$, então, como $a, b > 0$, o argumento do parágrafo anterior (utilizado com a no lugar de b e b no lugar de a) nos daria $a^2 < b^2$, o que não é o caso. Logo, a única possibilidade é que seja $a > b$.

Podemos resumir a discussão dos dois parágrafos acima na seguinte propriedade:

(viii) Se a e b são números reais positivos, então

$$a > b \iff a^2 > b^2,$$

ou, de uma forma equivalente,

$$a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

A propriedade (viii) pode ser utilizada para estimar raízes quadradas, conforme mostrado pelos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4. Voltando à pergunta feita na seção 1, sobre a representação decimal de $\sqrt{2}$, utilizando a propriedade (viii), obtemos:

$$1 < 2 < 4 \implies \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \implies 1 < \sqrt{2} < 2.$$

Daí, já sabemos que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Agora, utilizando a mesma propriedade, segue de

$$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$$

que

$$1,4 = \sqrt{1,96} < \sqrt{2} < \sqrt{2,25} = 1,5.$$

Analogamente,

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$$

implica, pela propriedade (vii),

$$1,41 = \sqrt{1,9881} < \sqrt{2} < \sqrt{2,0164} = 1,42.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, podemos verificar facilmente que

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots,$$

onde, no segundo membro acima, os quatro primeiros algarismos após a vírgula são os corretos.

Exemplo 5. Raciocinando como no exemplo anterior, temos

$$2,89 < 3 < 3,24 \implies \sqrt{2,89} < \sqrt{3} < \sqrt{3,24} \\ \implies 1,7 < \sqrt{3} < 1,8.$$

Agora, como

$$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276,$$

temos da propriedade (viii) que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. Prossequindo analogamente, cheque que

$$\sqrt{3} \cong 1,7320,$$

com quatro casas decimais corretas.

Terminamos esta seção observando que os conjuntos numéricos

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$$

satisfazem a seguinte sequência de inclusões de conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Além disso, o conjunto dos números reais também contém o conjunto dos números irracionais. De fato, se denotarmos o conjunto dos números irracionais por \mathbb{Q}' , então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

3 Representação geométrica

Daremos, agora, uma ideia de como um número racional (fração) pode ser representado geometricamente sobre uma reta r . Para tanto, escolhemos um ponto O em r para representar o 0, uma das semirretas com origem em O para ser **positiva** (a outra será **negativa**) e um outro ponto P , agora na semirreta positiva, para representar o 1. O segmento OP será a unidade de comprimento utilizada. Por exemplo, para marcar o número $\frac{8}{3} = 2,666\dots$ sobre r , marcamos na semirreta positiva um segmento OQ , que tem oito vezes a medida de OP . O ponto Q representará o número 8. Daí, marcamos, ainda sobre a semirreta positiva, o segmento OR , cuja medida é um terço de OQ . O ponto R representará o número $\frac{8}{3}$ (veja a figura 2).

Observe que nada do que foi utilizado para marcar o número $\frac{8}{3}$ na reta r impede que façamos o mesmo com qualquer outra fração positiva. Para marcar as frações negativas, realizamos um procedimento inteiramente análogo, mas na semirreta negativa.

Então, qualquer número racional pode ser representado sobre r . E quanto à recíproca? Isto é, com a representação dada pela figura 2, todo ponto de r representa um número

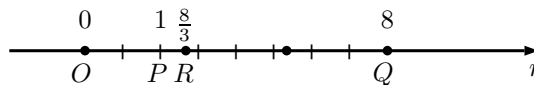


Figura 2: Representação geométrica dos racionais.

racional? A resposta a essa pergunta é não! De fato, pode-se mostrar que existe uma infinidade de pontos sobre r que não representam número racional algum.

Mais precisamente, pode-se mostrar que os pontos de r que não representam números racionais são exatamente aqueles que representam os números irracionais. Dessa forma, concluímos que todo número real pode ser representado em r , e todo ponto de r representa exatamente um número real, o qual pode ser racional ou irracional.

Vejam um exemplo importante.

Exemplo 6. Como na figura 2, seja P o ponto, sobre a reta r , que representa o número 1. Agora, considere o quadrado $OPQR$ de lado 1 (veja a figura 3). Por fim, marque (conforme mostrado na figura 3) um ponto T na semirreta positiva de modo que $OQ \equiv OT$. O ponto T não pode representar um número racional, pois, como já vimos, a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, que é igual a $\sqrt{2}$, é um número irracional.

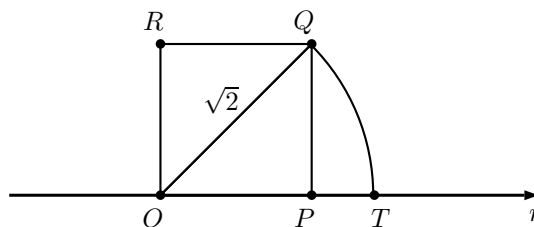


Figura 3: Representação geométrica de $\sqrt{2}$.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para cada uma das três seções que compõem esta aula. Na seção 1, chame atenção para a existência de números com representação decimal infinita e não periódica, que são os números irracionais. Na seção 2, saliente as propriedades das operações aritméticas e da relação de ordem em \mathbb{R} . Finalmente, na seção 3, explique como os números racionais podem ser marcados sobre uma reta e, também, justifique a existência de pontos sobre a reta que não representam números racionais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
2. J. Ferreira. *A construção dos Números*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 20013.