Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3

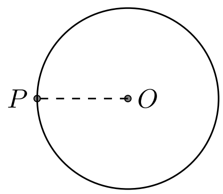
Círculos: elementos, arcos e ângulos inscritos

Oitavo ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Elementos de um círculo

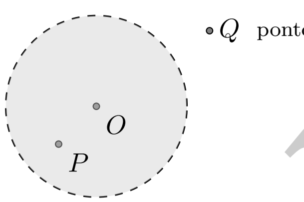
Sejam O um ponto do plano e r um número real positivo. Conforme vimos anteriormente, o *círculo* de *centro* O e *raio* r, denotado por $C(O, r)$, é o subconjunto do plano formado por todos os pontos P que estão à mesma distância r do ponto O (veja a figura abaixo).



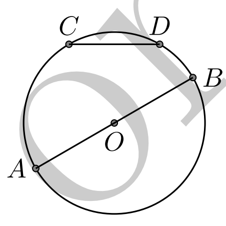
Reservamos o termo *circunferência* para nos referirmos ao comprimento de um círculo. Por vezes, a palavra *raio* também será usada para denotar um segmento $\overline{OA}$, com $A \in C(O, r)$.

Associados a um círculo temos vários conceitos geométricos. A seguir, apresentamos os principais, bem como suas respectivas notações.

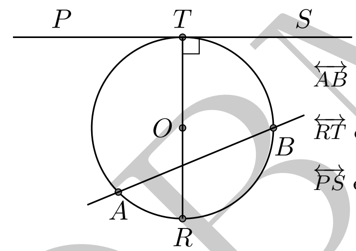
- Um ponto P do plano, com $OP < r$, é denominado um *ponto interior* ao círculo $C(O, r)$; o conjunto formado pelos pontos interiores a um círculo é chamado de *interior do círculo*. Por outro lado, um ponto Q do plano tal que $OQ > r$ é dito um *ponto exterior* a $C(O, r)$; o conjunto formado pelos pontos exteriores a um círculo é o *exterior do círculo*. A união de um círculo com seu interior é chamado de *disco*.



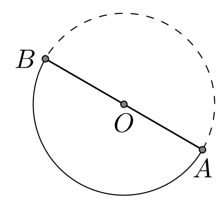
- Um segmento cujas extremidades são pontos pertencentes ao círculo $C(O, r)$ é denominado uma *corda* de $C(O, r)$. Qualquer corda de um círculo que contenha seu centro O é denominada um *diâmetro* do círculo.



- Se A e B são pontos de um círculo $C(O, r)$, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é denominada a *reta secante* a $C(O, r)$ pelos pontos A e B. Uma reta secante $\overleftrightarrow{RT}$ que contém o centro O recebe o nome especial de *reta normal* ao círculo. Neste caso, ela fica totalmente caracteriza pelos pontos O e T e, também, pelos pontos O e R, pois a reta que passa por dois pontos distintos é única. Uma *tangente* a um círculo é uma reta que intersecta o círculo em apenas um ponto T. Este ponto é chamado de *ponto de tangência* e dizemos que o círculo e a reta se tangenciam em T. Na próxima seção, mostraremos como construir a tangente a um círculo passando por um de seus pontos, bem como daremos interpretações geométricas para os conceitos acima.

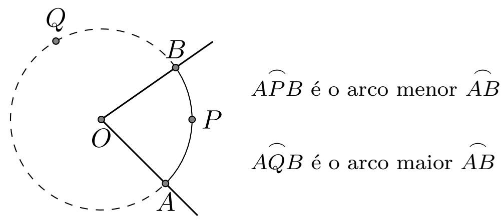


- Todo diâmetro $\overline{AB}$ de um círculo $C(O, r)$ o divide em duas partes congruentes (iguais), denominadas *semicírculos*. Reciprocamente, se uma corda divide um círculo em duas partes iguais, é possível mostrar que ela é, necessariamente, um diâmetro.



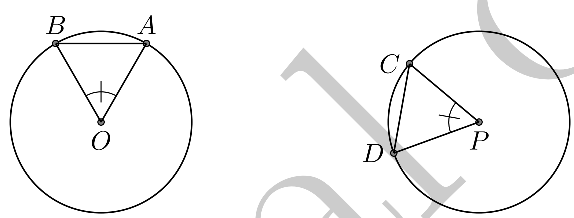
As extremidades de uma corda $\overline{AB}$ de um círculo o dividem em duas partes, chamadas de **arcos de círculo**. Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos uma qualquer dessas partes por $\overset{\frown}{AB}$. Se $\overline{AB}$ não é um diâmetro, o *arco menor* $\overset{\frown}{AB}$ é a porção do círculo formada pelos pontos A e B, juntamente com os pontos do mesmo que estão no interior do ângulo[1] $\angle AOB$ (veja a figura a seguir); por outro lado, o *arco maior* $\overset{\frown}{AB}$ é a porção do círculo formada pelos pontos A e B, juntamente com os pontos do mesmo que pertencem ao exterior do ângulo $\angle AOB$ (veja novamente a próxima figura). Um maneira de especificar um desses arcos sem ambiguidade é tomar um terceiro ponto P sobre o mesmo, escrevendo então $\overset{\frown}{APB}$ para denotá-lo. Assim, $\overset{\frown}{APB}$ é o arco menor (respectivamente maior) $\overset{\frown}{AB}$ se P for um ponto no interior (respectivamente exterior) do ângulo $\angle AOB$.

[1] Recorde que, pelo ângulo $\angle AOB$, entendemos a região *convexa* delimitada pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, de sorte que $A\widehat{O}B < 180°$.



- O ângulo $\angle AOB$ associado ao arco menor $\widehat{AB}$ é denominado um *ângulo central* de $C(O,r)$; a *medida* (em graus ou radianos) do arco menor $\widehat{AB}$ é, por definição, igual à medida do ângulo central correspondente (em graus ou radianos). A medida do arco maior $\widehat{AB}$ em graus (respectivamente em radianos) é, por definição, igual a $360°$ (respectivamente 2π) menos a medida do arco menor $\widehat{AB}$.

Observamos que um arco unitário (isto é, um arco de uma unidade de medida) de um círculo $C\,(0,r)$ é um arco cujo ângulo central associado é um ângulo unitário (isto é, um ângulo de uma unidade de medida). Assim, as noções de congruência, adição e subtração de arcos ficam estabelecidas a partir das noções correspondentes de congruência, adição e subtração dos ângulos centrais associados. Logo, é imediato verificar que dois arcos menores $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ de círculos de mesmo raio (ou de um mesmo círculo $C\,(O,r)$) possuem a mesma medida se, e somente se, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem a mesma medida.

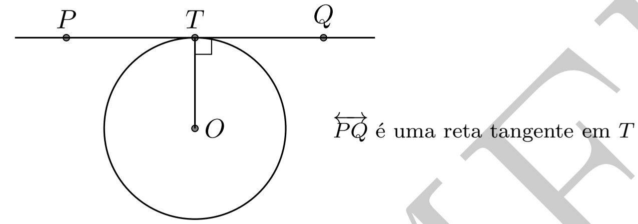


$C(O,OA)$ e $C(P,PC)$ têm o mesmo raio $OA = r = PC$.

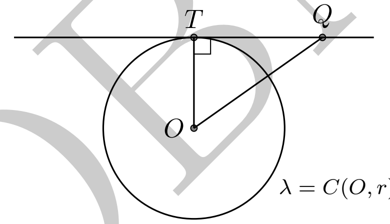
2 Posições relativas de uma reta e um círculo

Entre os resultados apresentados nesta seção, alguns são de fundamental importância para o estudo da construção com régua e compasso. Um exemplo é o teorema da interseção reta-círculo. Antes, contudo, precisamos de outro resultado, importante em si.

Teorema 1. *A reta perpendicular a um raio de um círculo, passando pela extremidade que pertence ao círculo, é tangente a ele nesse ponto. Reciprocamente, toda reta tangente a um círculo é perpendicular ao raio do círculo que contém o ponto de tangência.*

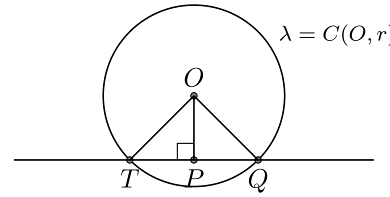


Prova. Sejam $\lambda = C(O,r)$ um círculo de centro O e raio r e $\overline{OT}$ um de seus raios. Seja t a reta perpendicular a $\overline{OT}$ em T (veja a figura abaixo).



Se Q é um ponto de t distinto de T, então $\overline{OQ}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo OTQ, de forma que $OQ > OT$. Portanto, Q não pertence a λ, e concluímos que T é o único ponto em comum a λ e t. Mas, isso é o mesmo que dizer que t é tangente a λ.

Reciprocamente, seja t uma reta que passa por um ponto T de λ, mas tal que t não é perpendicular ao raio $\overline{OT}$ em T (veja a figura abaixo).



Seja P o pé da perpendicular a t passando pelo centro O de λ. A unicidade da perpendicular baixada de um ponto a uma reta garante que $T \neq P$. Considere um ponto Q sobre t, situado na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PT}$ e com $TP = QP$. Em relação aos triângulos OPQ e OPT, temos que $\overline{OP}$ é um lado de ambos, $O\widehat{P}Q = O\widehat{P}T = 90°$ e $PQ = PT$ (por construção); portanto, tais triângulos são congruentes pelo critério LAL. Assim, $OQ = OT = r$, o que mostra que o ponto Q também pertence a λ. Portanto, t não é tangente a λ em T. □

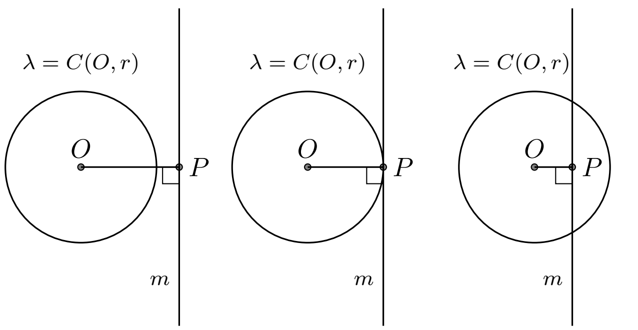
O resultado anterior fornece imediatamente o resultado ao qual aludimos no início desta seção (veja também a figura subsequente ao enunciado a seguir).

Teorema 2 (Interseção reta-círculo). *Sejam m uma reta e $\lambda = C(O, r)$ o círculo de centro O e raio r. Se P é o pé da perpendicular à reta m baixada do ponto O, então uma das seguintes situações ocorre:*

(a) P está situado no exterior de λ e, assim, o mesmo ocorre com os outros pontos de m.

(b) P está situado no círculo λ e, assim, a reta m e o círculo são tangentes no ponto P.

(c) P está situado no interior de λ e, assim, a reta m intersecta o círculo em exatamente dois pontos.



Recordemos que a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidade do segmento. Esse fato dá uma prova imediata para o seguinte resultado.

Teorema 3. *A mediatriz de qualquer corda de um círculo passa pelo centro do mesmo.*

A demonstração do resultado seguinte faz uso dos critérios de congruência de triângulos e será deixada a cargo do leitor.

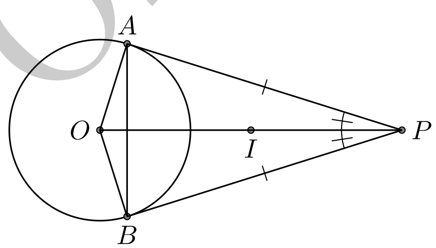
Teorema 4. *Uma condição necessária e suficiente para que a reta passando pelo centro de um círculo seja perpendicular a uma corda do mesmo é que ela intersecte a corda em seu ponto médio.*

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado.

Teorema 5. *Sejam λ um círculo de centro O e P um ponto no exterior de λ. Se A e B são pontos de λ tais que as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são tangentes a λ, então:*

(a) Os segmentos tangentes $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são congruentes;

(b) A reta $\overleftrightarrow{PO}$ é a bissetriz do ângulo $\angle APB$ e, também, a mediatriz da corda $\overline{AB}$.

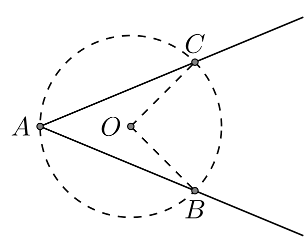


Prova. O Teorema 1 diz que $\angle PAO$ e $\angle PBO$ são ângulos retos. Além disso, como A e B são pontos de λ, temos que $AO = BO$. Como OP é hipotenusa comum aos triângulos OAP e OBP, segue do critério cateto hipotenusa de congruência entre triângulos retângulos que $PAO \equiv PBO$. Portanto, $PA = PB$ e, da igualdade $O\widehat{P}A = O\widehat{P}B$, concluímos que $\overleftrightarrow{PO}$ é a bissetriz do ângulo $\angle APB$. Para o que falta, basta ver que, como $OA = OB$ e $PA = PB$, os pontos O e P pertencem à mediatriz do segmento AB. Mas, como uma reta é unicamente determinada por dois de seus pontos, concluímos que tal mediatriz é, precisamente, a reta $\overleftrightarrow{OP}$. □

3 Arcos e ângulos num círculo

Um ângulo está *inscrito* num arco $\overset{\frown}{BC}$ de um círculo $\lambda = C(O, r)$ quando seu vértice é um ponto A do arco, distinto de B e C, e seus lados passam por B e C.

Usualmente, quando dizemos que $\angle BAC$ é um ângulo inscrito em λ, fica subentendido que B e C são as extremidades do arco ao qual A pertence. Nesta situação, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são cordas de λ e dizemos que o arco $\overset{\frown}{BC}$ de λ ao qual A *não pertence* é o arco *subentendido* por BAC (veja a figura abaixo, na qual o arco subentendido é o arco $\overset{\frown}{BC}$ menor de λ).



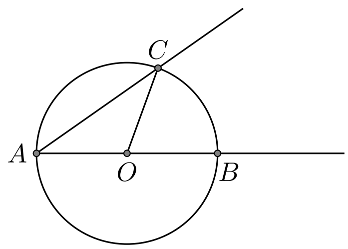
$\angle BAC$ inscrito em λ.

A medida de um ângulo inscrito está relacionada com a medida do arco subentendido. Precisamente, temos o importante resultado a seguir.

Teorema 6 (do Ângulo Inscrito). *Se $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são cordas de um círculo λ, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade da medida do arco subentendido $\overset{\frown}{BC}$ de λ.*

Prova. Sejam $\angle BAC$ um ângulo inscrito num círculo λ de centro O e $\overset{\frown}{BC}$ o arco subentendido. Vamos considerar três casos distintos:

Caso I: Um dos lados do ângulo é um diâmetro de λ: suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{AB}$ seja um diâmetro de λ (veja a figura abaixo).



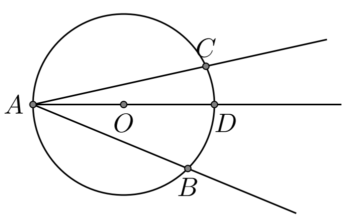
$\angle BAC$ inscrito em λ, sendo $\overline{AB}$ um diâmetro.

Nesse caso, segue da definição que a medida do arco $\widehat{BC}$, correspondente ao ângulo $\angle BAC$, é igual a $B\widehat{O}C < 180°$. Como o triângulo AOC é isósceles de base $\overline{AC}$ temos:

$$B\widehat{O}C = B\widehat{A}C + O\widehat{C}A = 2B\widehat{A}C,$$

o que demonstra o teorema neste caso particular.

Caso II: os lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão em semiplanos opostos relativamente à reta $\overleftrightarrow{AO}$ (veja a figura abaixo, na qual, por simplicidade, ilustramos somente o caso $B\widehat{O}C < 180°$).

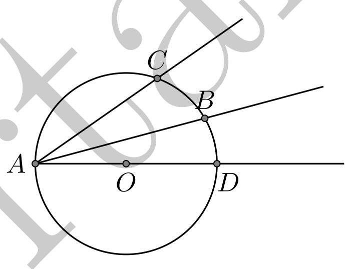


$\angle BAC$ inscrito em λ, com O no seu interior.

Seja D a interseção da semirreta $\overrightarrow{AO}$ com o arco $\widehat{BC}$. Aplicando o caso já demonstrado aos ângulos inscritos $\angle BAD$ e $\angle DAC$, obtemos:

$$B\widehat{O}C = B\widehat{O}D + D\widehat{O}C = 2(B\widehat{A}D + D\widehat{A}C) = 2B\widehat{A}C.$$

Caso III: os lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão em um mesmo semiplano relativamente à reta $\overleftrightarrow{AO}$.



$\angle BAC$ inscrito em λ, com O em seu exterior.

Seja D a interseção da semirreta $\overrightarrow{AO}$ com λ. Aplicando o caso I aos ângulos inscritos $\angle DAB$ e $\angle DAC$, obtemos:

$$B\widehat{O}C = D\widehat{O}C - D\widehat{O}B = 2(D\widehat{A}C - D\widehat{A}B) = 2B\widehat{A}C.$$

□

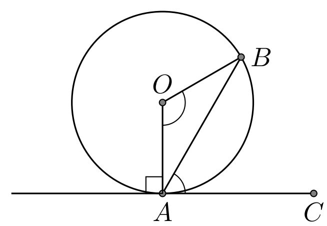
Uma consequência imediata do Teorema anterior é a seguinte afirmação.

Corolário 7. *Todos os ângulos inscritos que subentendem um mesmo arco têm uma mesma medida.*

Como caso limite ao de um ângulo inscrito, temos aquele em que um dos segmentos $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ é *tangente* a λ. Este tipo de ângulo recebe o nome de **ângulo de segmento**, ou seja, um ângulo $\angle BAC$ é um ângulo de segmento quando seu vértice A é um ponto do círculo, um dos segmentos $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ é uma corda de λ e o outro é tangente a λ. Para esse tipo de ângulo vale um resultado análogo ao visto para ângulos inscritos, o qual colecionamos a seguir.

Teorema 8 (do Ângulo de Segmento). *Se $\angle BAC$ é um ângulo de segmento de um círculo $\lambda = C(0, r)$, tal que o segmento $\overline{AB}$ é uma corda de λ e o segmento $\overline{AC}$ é tangente a λ, então a medida de $\angle BAC$ é igual à metade da medida do arco $\widehat{AB}$ nele contido. Em particular, no caso em que $B\widehat{A}C < 90°$, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central $\angle AOB$ correspondente.*

Prova. Por simplicidade, analisemos somente o caso em que $B\widehat{A}C < 90°$ (a análise do outro caso é análoga e será deixada como exercício para o leitor). Então (veja a figura abaixo), O é exterior ao ângulo $\angle BAC$ e, assim, o arco $\widehat{AB}$ contido em $\angle BAC$ é um arco menor de λ.



Por definição de ângulo de segmento, temos que $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, a corda $\overline{AB}$ é a base do triângulo isósceles BOA. Assim, sendo $\alpha = B\widehat{A}C$, temos $A\widehat{B}O = B\widehat{A}O = 90° - \alpha$. Como a soma dos ângulos internos de ABO vale $180°$, obtemos

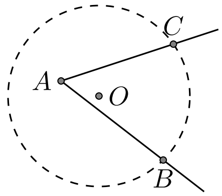
$$B\widehat{O}A = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha = 2B\widehat{A}C.$$

□

Agora, consideremos uma generalização dada pelo caso em que o vértice A de $\angle BAC$ não está sobre o círculo $\lambda = C(0, r)$. Este tipo de ângulo recebe o nome de **ângulo ex-cêntrico**[2]. Há duas situações distintas a considerar, quais sejam:

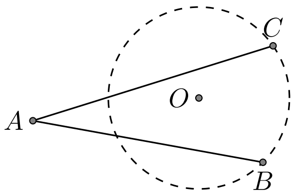
(i) O vértice A está no interior de λ: neste caso, dizemos que $\angle BAC$ é um **ângulo ex-cêntrico interior** (veja a figura abaixo).

[2]Essa nomenclatura, apesar de usual em Português, é um tanto infeliz, haja vista que, antes de mais nada, A pode coincidir com o centro de λ!



$\angle BAC$ é um ângulo ex-cêntrico interior a λ.

(ii) O vértice A está no exterior de λ: aqui, dizemos que $\angle BAC$ é um **ângulo ex-cêntrico exterior** (novamente, veja a figura a seguir).



$\angle BAC$ é um ângulo ex-cêntrico exterior a λ.

Observe que, quando A coincide com O, o ângulo ex-cêntrico interior $\angle BAC$ nada mais é que um ângulo central. Por outro lado, quando A tende para um ponto de $C(O, r)$, o ângulo ex-cêntrico correspondente tende para um ângulo inscrito. De qualquer forma, os próximos resultados mostram que as fórmulas para o cálculo das medidas de ângulos ex-cêntricos são compatíveis com essas possibilidades!

Analisemos, inicialmente, o caso de ângulos ex-cêntricos interiores. Para tanto, observe que um ângulo ex-cêntrico interior $\angle BAC$ de um círculo $C(O, r)$ determina as cordas $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ que concorrem no vértice A e, consequentemente, os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{DE}$ como mostrado na figura 1.

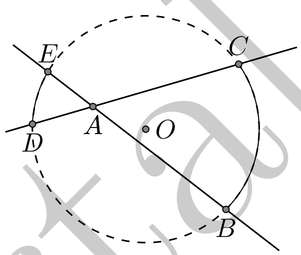


Figura 1: $\angle BAC$ é um ângulo ex-cêntrico interior a λ.

De posse das observações acima, temos o seguinte resultado.

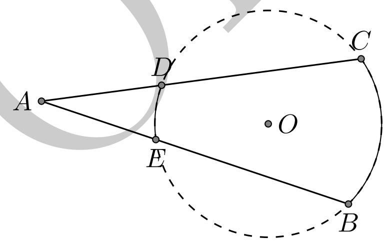
Teorema 9 (do Ângulo Ex-cêntrico Interior). *Seja $\angle BAC$ um ângulo ex-cêntrico interior de um círculo λ. Nas notações da figura acima, se $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são as cordas de λ que concorrem no vértice A, então a medida de $\angle BAC$ é igual à média aritmética das medidas dos arcos de λ contidos nos ângulos $\angle BAC$ e $\angle DEA$.*

Prova. Basta aplicar o Teorema do Ângulo Inscrito para os ângulos inscritos $\angle ECD$ e $\angle BEC$, juntamente com o Teorema do Ângulo Externo, aplicado ao ângulo externo $\angle BAC$ do triângulo AEC. De fato, podemos escrever:

$$\begin{aligned} B\widehat{A}C &= B\widehat{E}C + E\widehat{C}D = \frac{1}{2}B\widehat{O}C + \frac{1}{2}E\widehat{O}D \\ &= \frac{1}{2}\left(B\widehat{O}C + E\widehat{O}D\right). \end{aligned}$$

□

Voltemo-nos, agora, ao caso dos ângulos ex-cêntricos exteriores. Para tanto, na figura a seguir, observamos que um ângulo ex-cêntrico exterior determina cordas $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$, as quais estão contidas nos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Consequentemente, os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{DE}$ de λ e contidos em $\angle BAC$ são aparentemente tais que a medida de $\overset{\frown}{BC}$ é maior do que a medida de $\overset{\frown}{DE}$. Uma consequência da demonstração do resultado a seguir é que esse será, de fato, o caso.



$\angle BAC$ é um ângulo ex-cêntrico exterior a λ.

Para ângulos ex-cêntricos exteriores vale o seguinte resultado.

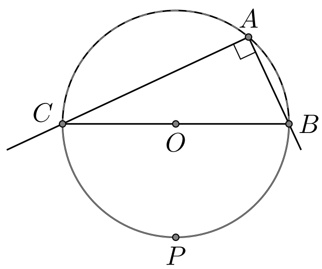
Teorema 10 (do Ângulo Ex-cêntrico Exterior). *Seja $\angle BAC$ um ângulo ex-cêntrico exterior de um círculo λ. Se $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são as cordas de λ contidas nos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, então a medida de $\angle BAC$ é igual à semidiferença entre as medidas dos arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{DE}$, nessa ordem.*

Prova. A prova deste teorema é bastante similar àquela do teorema anterior, e será deixada para o leitor fazer. Como sugestão, aplique o Teorema do Ângulo Inscrito aos ângulos inscritos $\angle BEC$ e $\angle DCE$, juntamente com o Teorema do Ângulo Externo ao ângulo externo $\angle BEC$ do triângulo ACE. □

De posse dos teoremas do ângulo inscrito e dos ângulos ex-inscritos interior e exterior, podemos apresentar a condição necessária e suficiente usual para que um triângulo BAC seja retângulo, com ângulo reto no vértice A.

Teorema 11. *Um ângulo $\angle BAC$ está inscrito num semicírculo se, e somente se, ele é um ângulo reto. Portanto,* *um triângulo BAC está inscrito num semicírculo se, e somente se, ele é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.*

Prova. Inicialmente, suponha que $\angle BAC$ está inscrito em um semicírculo do círculo $\lambda = C\,(O, r)$ (veja a figura abaixo).



Então, $\overline{BC}$ é um diâmetro de λ, de sorte que $\angle BAC$ subentende um arco de λ de medida $180°$. Segue do Teorema do Ângulo inscrito que

$$B\widehat{A}C = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Reciprocamente, suponha que $B\widehat{A}C = 90°$, seja O o ponto médio de BC e $\lambda = C(O, r)$, onde $r = \frac{1}{2}BC$. O segmento $\overline{BC}$, sendo um diâmetro de λ, o divide em dois arcos de $180°$ cada.

Se A não está sobre λ, então há duas possibilidades:

(i) A é interior a λ: pelo Teorema 9, o ângulo $\angle BAC$ teria medida maior que $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, o que é uma contradição.

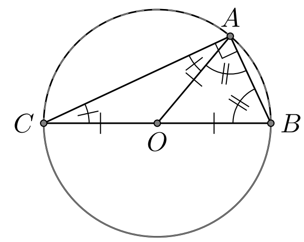
(ii) A é exterior a λ: pelo Teorema 10, o ângulo $\angle BAC$ teria medida menor que $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, o que também é uma contradição.

Por fim, uma vez que ambas as possibilidades acima geram contradições, a única possibilidade factível é que A esteja sobre λ. $\square$

O corolário a seguir explicita uma consequência imediata, já vista no tópico Paralelogramos Especiais e bastante útil, da prova da segunda parte do teorema anterior.

Corolário 12. *Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem comprimento igual a metade do comprimento da hipotenusa.*

Prova. Se ABC é retângulo em A, então a segunda parte da demonstração do resultado anterior garante que A está sobre $\lambda = C(O, r)$, onde O é o ponto médio de BC e $r = \frac{1}{2}BC$ (veja a figura abaixo).



Portanto, $\overline{AO}$ é a mediana relativa à hipotenusa e

$$AO = r = \frac{1}{2}BC.$$

$\square$

Finalizamos este material observando que os resultados desta seção serão usados, futuramente, na obtenção dos conjuntos usuais de condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja inscritível num círculo.

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. A primeira seção traz vários conceitos associados a um círculo que devem ser bem assimilados. Na seção dois, sugerimos trabalhar com algumas construções geométricas (compasso e régua), abordando problemas que permitam aplicar os principais resultados vistos. Após estudar o corolário 12 da terceira seção é importante retomar o resultado do Teorema 5 da seção 2 e apresentar soluções para os problemas clássicos de construções geométricas de tangências a círculos.

A referência [2] contém vários exercícios simples envolvendo o Teorema do Ângulo Inscrito e suas consequências. Na referência [1] encontramos problemas mais conceituais, incluindo alguns que tratam de construções geométricas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.