Material Teórico - Módulo Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Considere dois segmentos de reta, AB e CD, com $\overline{CD} = u$. Se existem $n-1$ pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, sobre o segmento AB, tais que

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} = \overline{A_{n-1}B} = u,$$

dizemos que a razão entre os comprimentos dos segmentos AB e CB é o número inteiro positivo n, e escrevemos

$$\overline{AB} = n \cdot u.$$

A figura a seguir ilustra os casos $n = 2$, 3 e 4, assim como o caso genérico.

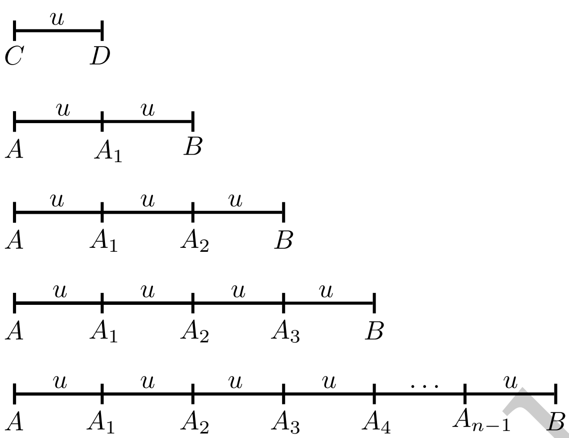

Figura 1: segmentos de razão inteira.

Se a razão entre os segmentos AB e CD não é inteira, pode existir um terceiro segmento EF tal que AB e CD sejam ambos múltiplos inteiros de EF. Mais precisamente, se esse for o caso, existirão números inteiros positivos m e n tais que

$$\overline{EF} = v, \quad \overline{AB} = m \cdot v \;\text{ e }\; \overline{CD} = n \cdot v.$$

Então, a razão entre os segmentos AB e CD é igual a $\frac{m}{n}$, e escrevemos

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot u.$$

A título de ilustração, a Figura 2 mostra um par de segmentos, AB e CD, tais que $\overline{AB} = \frac{7}{3} \cdot \overline{CD}$, juntamente com os segmentos de comprimento v tais que $\overline{CD} = 3 \cdot v$ e $\overline{AB} = 7 \cdot v$.

Em qualquer um dos dois casos acima, dizemos que os segmentos AB e CD são **comensuráveis**. De fato, o segundo caso generaliza o primeiro, pois, no primeiro caso (e nas notações acima), podemos considerar $EF = CD$ e, assim, obter

$$\overline{AB} = \frac{n}{1} \cdot u = n \cdot u.$$

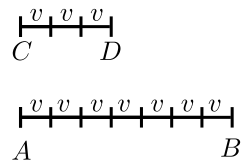

Figura 2: segmentos de razão racional.

No Exemplo 1 a seguir, veremos que pode ocorrer de dois segmentos dados AB e CD *não serem* comensuráveis. Dito de outra forma, pode ocorrer de não existir um segmento EF cujo comprimento seja um *submúltiplo inteiro* dos comprimentos de AB e CD. Se esse for o caso, dizemos que os segmentos AB e CD são **incomensuráveis**.

Para a discussão que segue, precisaremos dos seguintes fatos elementares sobre quadrados perfeitos: *o quadrado de todo inteiro par é par, e o quadrado de todo inteiro ímpar é ímpar*. Podemos justificar essas afirmações da seguinte forma:

i. Um inteiro par n é, por definição, o dobro de algum outro inteiro, digamos $n = 2k$. Sendo assim, temos

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2,$$

de modo que n^2 também é par.

ii. Um inteiro ímpar n, por definição, deixa resto 1 quando dividido por 2; assim, n é um par mais 1, e podemos escrevê-lo como $n = 2k + 1$, para algum inteiro k. Portanto, temos

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

e concluímos que n^2 também é um par mais 1, logo, é ímpar.

Exemplo 1. *Considere um quadrado $ABCD$, como mostrado na Figura 3. Então, os segmentos AB e AC são incomensuráveis.*

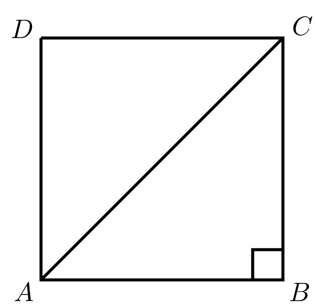

Figura 3: um exemplo de segmentos incomensuráveis.

Prova. Com efeito, uma vez que $\overline{AB} = \overline{BC}$, o Teorema de Pitágoras garante que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

ou, o que é o mesmo,

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}.$$

Se AB e AC fossem segmentos comensuráveis, existiriam inteiros positivos p e q tais que $\overline{AC} = \frac{p}{q}\overline{AB}$. Daí, obteríamos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

isto é, $\sqrt{2}$ seria um número racional. A seguir, mostraremos que isso não é verdade.

Supondo que (1) valha, podemos assumir que os inteiros p e q são primos entre si. Realmente, se esse não for o caso, temos $p = dm$ e $q = dn$, com $d = \operatorname{mdc}(p, q)$. Portanto, $\operatorname{mdc}(m, n) = 1$, isto é, m e n são primos entre si, e

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{dm}{dn} = \frac{m}{n}.$$

A igualdade acima equivale a $n\sqrt{2} = m$ ou, elevando ambos os membros ao quadrado, a $2n^2 = m^2$. Assim, m^2 é par e, pelas observações que precedem o enunciado do exemplo, isso implica que m é ele mesmo par. Escrevendo $m = 2m_1$, com m_1 inteiro, e substituindo na igualdade $2n^2 = m^2$, obtemos

$$2n^2 = (2m_1)^2 = 4m_1^2$$

e, daí, $n^2 = 2m_1^2$. Assim, n^2 também é par e, novamente pelas observações que precedem o enunciado do exemplo, n é par. Escrevendo $n = 2n_1$, com n_1 inteiro, chegamos à conclusão contraditória de que, por um lado, m e n são primos entre si, e, por outro, m e n são múltiplos de 2.

A partir daí, a única conclusão lógica possível é que nosso raciocínio, apesar de totalmente correto, partiu de uma premissa falsa, qual seja, a de que (1) era uma igualdade verdadeira, quer dizer, que $\sqrt{2}$ era racional. Então, (1) é falso.

Por sua vez, isso significa que a suposição de que os segmentos AB e AC eram comensuráveis, por ter levado a uma conclusão falsa, era ela mesma falsa. Então, os segmentos AB e AC são incomensuráveis. □

Em linguagem moderna, vemos que a *incomensurabilidade* de dois segmentos equivale ao fato de a razão entre seus comprimentos ser um número *irracional*. Na Antiguidade Clássica grega isso não estava claro e, de fato, o exemplo anterior foi o ponto de partida para que os gregos percebessem que os números racionais não esgotavam todas as possibilidades. Isso coube ao astrônomo e matemático grego Eudoxo de Cnidos, um discípulo de Platão, que desenvolveu uma teoria para lidar com quantidades incomensuráveis.

Observação 2. *As palavras comensurável e incomensurável nunca devem ser utilizadas em referência a quantidades. De fato, vimos acima que esses conceitos são usados para relacionar duas quantidades, e não para fazer referência a uma só quantidade. Por outro lado, coloquialmente é muito comum encontrar pessoas sem experiência em Matemática falando coisas do tipo: "há uma quantidade incomensurável de estrelas no Universo". A palavra menos inadequada, nesse caso, seria "*incontável*", e a 100% correta*[1] *seria simplesmente "*imensa*".*

Um raciocínio similar ao esboçado no exemplo anterior (utilizando, entretanto, um pouco mais de divisibilidade do que gostaríamos de invocar aqui) garante que se ABC é um triângulo retângulo em B e tal que $\overline{AB} = m \cdot u$ e $\overline{BC} = nm \cdot u$, com $m^2 + n^2$ *não quadrado perfeito*, então, a hipotenusa AC (que tem comprimento $\sqrt{m^2 + n^2} \cdot u$) e o cateto AB (ou o cateto BC) não são comensuráveis. A figura abaixo ilustra essa situação.

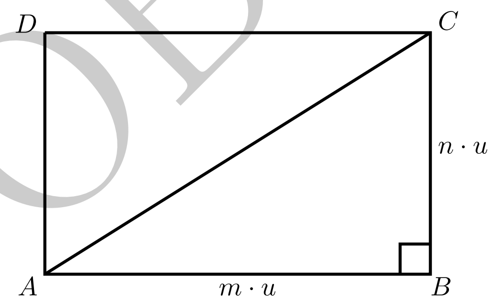

Figura 4: infinitos exemplos de segmentos incomensuráveis.

Terminamos este material com um exemplo ilustrando o conceito de *comensurabilidade de segmentos*.

Exemplo 3. *Se os três lados de um triângulo ABC são comensuráveis dois a dois, mostre que um segmento EF, cuja medida é igual ao perímetro do triângulo, e um qualquer um dos lados desse mesmo triângulo são comensuráveis.*

Solução. Como AB e BC são comensuráveis, devem existir um segmento de medida v e inteiros positivos m e n tais que $\overline{AB} = m \cdot v$ e $\overline{BC} = n \cdot v$. Por outro lado, BC e AC também são comensuráveis. Logo, devem existir um segmento de medida w e inteiros positivos p e q tais que $\overline{BC} = p \cdot w$ e $\overline{AC} = q \cdot w$.

[1] Escrevemos *menos inadequada*, ao invés de *adequada*, pelo fato de que, em Matemática, a palavra *incontável* é reservada para fazer referência a uma quantidade infinita que não pode ser *enumerada*, isto é, não pode ser colocada em *correspondência biunívoca* com os números naturais. De certa forma, isso poder ser colocado em palavras dizendo que *uma quantidade incontável é uma quantidade infinita que é maior que o infinito do conjunto* $\{1, 2, 3, \dots\}$ *dos naturais*. Mas, o desenvolvimento rigoroso dessas ideias foge aos nossos propósitos aqui.

Agora, dividimos o segmento BC em np segmentos, todos de medida $\frac{\overline{BC}}{np} = u$. Desse modo, temos

$$np \cdot u = \overline{BC} = n \cdot v \quad \text{e} \quad np \cdot u = \overline{BC} = p \cdot w,$$

donde obtemos, respectivamente,

$$p \cdot u = v \quad \text{e} \quad n \cdot u = w.$$

Portanto,

$$\overline{AC} = q \cdot w = qn \cdot u \quad \text{e} \quad \overline{AB} = m \cdot v = mp \cdot u.$$

Concluímos que o segmento EF, que tem medida igual ao perímetro do triângulo ABC, tem medida

$$\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (mp + qn + np) \cdot u.$$

Logo, EF é comensurável com BC, e um argumento análogo garante que EF também é comensurável com AC e AB. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada pelo menos uma sessão de 50min para expor o conteúdo desta aula. Faça alguns casos particulares, em que a razão entre os dois segmentos é um número inteiro, e em seguida faça outros exemplos nos quais essa razão seja um número racional, pois isso facilitará a compreensão. Ao expor o Exemplo 1, saliente que o fato crucial para que aqueles segmentos sejam incomensuráveis é que $\sqrt{2}$ é um número *irracional*. Mais informações sobre números irracionais podem ser encontradas nas referências [1] e [3]. O Exemplo 1.23 da referência [2] explica a situação mais geral descrita logo após a Observação 2. Caso você decida abordá-la, recomendamos utilizar uma sessão adicional.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

3. E. L. Lima, P. C. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 20016.