Material Teórico - O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

Exercícios sobre Sistemas de Equações

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

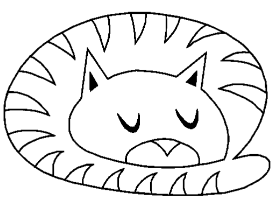
Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

O propósito dessa aula é exercitar os conceitos aprendidos nas aulas anteriores através da discussão de alguns exercícios. Recomendamos que os alunos tentem (por alguns minutos) resolver os exercícios antes de estudar as respectivas soluções. Os problemas que iremos resolver nesta aula possuem um nível consideravelmente elevado; nesse sentido, as ideias que foram aprendidas nas aulas anteriores serão fundamentais à elaboração dos argumentos lógicos de cada uma das soluções apresentadas.

Exercício 1 (OBM 2013). *Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e, quando Tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois gatos juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual porção da superfície do sofá está ocupada por Tica?*



Solução. Primeiramente, observe que há dois valores desconhecidos no enunciado: a área ocupada por Mate e a área ocupada por Tica. Seguindo o método que foi aprendido nas aulas anteriores, devemos atribuir variáveis (letras) a cada um desses valores. Sejam, pois, M a fração da superfície ocupada por Mate e T a fração da superfície ocupada por Tica.

Uma vez que os dois gatos juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá, temos

$$M + T = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, quando Tica chegou, restava a fração $1-M$ da superfície do sofá, da qual ela ocupou $1/4$; assim,

$$T = \frac{1}{4}(1-M).$$

Há, decerto, muitas formas de resolver o sistema formado pelas duas equações acima; dentre estas, utilizaremos o método da substituição. Como queremos calcular T, usaremos a segunda equação para escrever M em termos de T e, em seguida, substituiremos na primeira equação a expressão assim obtida. A primeira parte do que precisamos fazer segue abaixo:

$$T = \frac{1}{4}(1-M) \Rightarrow 4T = 1 - M \Rightarrow M = 1 - 4T.$$

Agora, a primeira equação nos dá

$$(1-4T) + T = \frac{1}{2}$$

e, daí,

$$3T = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $T = \frac{1}{6}$. $\square$

Exercício 2 (OBM). *O conteúdo de uma garrafa de refrigerante enche três copos grandes iguais e mais meio copo pequeno, ou 5 desses copos pequenos iguais mais a metade de um daqueles grandes. Qual é a razão entre o volume de um copo pequeno e o de um grande?*

Mais uma vez, observe que trata-se de um problema com dois valores desconhecidos (os volumes dos copos grande e pequeno). Porém, há apenas uma informação sobre estes valores, de forma que, em princípio, não poderemos formar um sistema linear para calcular os volumes dos copos em questão. Por outro lado, as ideias básicas para a solução de um sistema linear ainda podem ser úteis nesse caso, de forma que começar associando incógnitas aos volumes desejados para, em seguida, reescrever a informação dada utilizando tais incógnitas. A partir daí, veremos que uma simples manipulação algébrica fornecerá o resultado pedido.

Solução. Sejam G o volume do copo grande e P o volume do copo pequeno. Pela informação dada, temos que

$$3G + 0,5P = 5P + 0,5G.$$

Como nosso objetivo é obter a razão $\frac{P}{G}$, vamos "passar" a parcela $0,5P$ para o lado direito e a parcela $0,5G$ para o lado esquerdo, a fim de isolarmos as variáveis uma da outra. Assim fazendo, obtemos

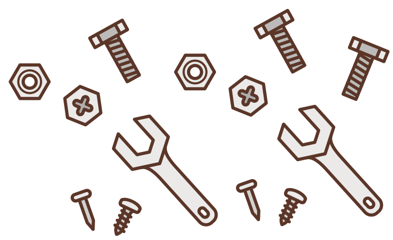
$$2,5G = 4,5P,$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$\frac{P}{G} = \frac{2,5}{4,5} = \frac{5}{9}.$$

$\square$

Exercício 3 (OBM). *Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra?*



Solução. Veja que, também neste exercício, temos um total de três valores desconhecidos (os pesos de um prego, um parafuso e um gancho), mas somente duas informações. Portanto, é bem provável que não possamos calcular cada um dos pesos desconhecidos. Apesar disso, assim como no exercício anterior, começamos utilizando três letras: p para o peso de um prego, q para o peso de um parafuso e r para o peso de um gancho.

Como nas questões anteriores, o próximo passo é reescrever as informações dadas em forma de equações, o que nesse caso é bastante simples:

$$p + 3q + 2r = 24$$

$$2p + 5q + 4r = 44.$$

Como antecipamos acima, agora você deve estar pensando em como resolver um sistema linear de duas equações, mas com três variáveis. A resposta é: *não há como fazê-lo! Pelo menos não de modo a obter uma solução única.*[1]

Porém, não é necessário resolver o sistema, uma vez que o enunciado pergunta somente qual é o valor de $12p+32q+24r$ ou, o que é o mesmo, $4(3p+8q+6r)$. Para calcular tal valor, começamos somando as duas equações do sistema para obter

$$3p + 8q + 6r = 68.$$

Em seguida, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por quatro, concluímos que a compra da Juquinha pesou

$$4(3p + 8q + 6r) = 4 \times 68 = 272\text{g}.$$

□

Exercício 4 (OMCPLP 2013). *Xiluva tem laranjas e cestas. Se Xiluva coloca duas laranjas em cada cesta, sobram quatro laranjas. Se ela coloca cinco laranjas em cada cesta, uma cesta fica vazia. Quantas laranjas e cestas tem Xiluva?*

Solução. Temos dois valores desconhecidos: o número ℓ de laranjas e o número c de cestas. Ao colocar duas laranjas em cada cesta, contamos um total de $2 \times c = 2c$ laranjas. Juntando com as outras quatro que ficaram de fora, obtemos o número total ℓ de laranjas, o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$2c + 4 = \ell.$$

Agora, ao colocar cinco laranjas em cada cesta, uma cesta fica vazia. De outra forma, teremos $c-1$ cestas com cinco laranjas cada, e isso representará o total de laranjas. Com isso, temos a seguinte equação:

$$5(c-1) = \ell.$$

Para resolver o sistema formado pelas duas equações, podemos começar simplesmente igualando seus primeiros membros (uma vez que ambos representam o valor ℓ):

$$2c + 4 = 5(c-1).$$

A partir daí, obtemos facilmente

$$2c + 4 = 5c - 5 \Rightarrow 9 = 3c \Rightarrow c = 3.$$

Por fim, substituindo este valor na primeira equação, temos que

$$\ell = 2 \times 3 + 4 = 10.$$

Portanto, Xiluva tem três cestas e dez laranjas. □

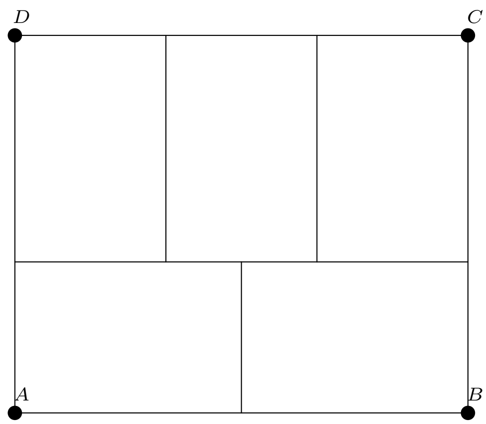
Exercício 5 (OBM). *O retângulo $ABCD$ da figura a seguir está dividido em cinco retângulos iguais. Se o perímetro de $ABCD$ é 20cm, calcule sua área.*

Solução. Em cada um dos cinco retângulos menores, sejam x a medida do lado maior e y a medida do lado menor. Agora, observe que medida do lado AB é $x + x = 2x$, ao passo que a medida do lado AD é $x + y$. Uma vez que os lados opostos de um retângulo têm comprimentos iguais, concluímos que o perímetro do retângulo $ABCD$ será

$$2x + (x + y) + 2x + (x + y) = 6x + 2y = 20.$$

Agora, para encontrarmos os valores de x e y, precisamos de mais uma equação. Para isso, veja que o lado CD, que

[1] Aproveitamos o momento para questioná-lo: Você consegue imaginar a geometria de um sistema como o que foi apresentado?



é igual a $3y$, dever ter comprimento igual ao do lado AB, o que nos fornece a igualdade

$$3y = 2x.$$

Substituindo este valor na primeira equação, temos:

$$3 \times 2x + 2y = 3 \times 3y + 2y = 11y = 20,$$

de sorte que

$$y = \frac{20}{11}.$$

Logo,

$$x = \frac{3y}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{20}{11} = \frac{30}{11}.$$

Por fim, como

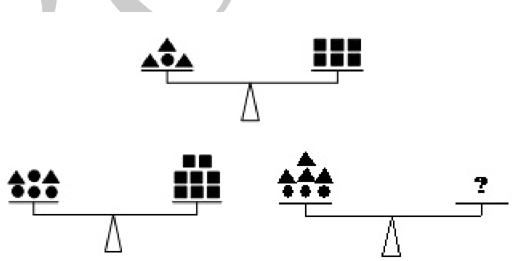
$$AB = 2x = \frac{60}{11} \quad \text{e} \quad BC = x + y = \frac{40}{11},$$

concluímos que a área de $ABCD$ é:

$$AB \times BC = \frac{60}{11} \times \frac{40}{11} = \frac{2400}{121}.$$

□

Exercício 6 (OBM). *Nas balanças a seguir, figuras com mesmas formas representam objetos de massas iguais. Quantos quadrados são necessários no lado direito para que a última balança fique equilibrada?*



Solução. Veja que do lado esquerdo de cada balança há apenas triângulos e círculos, enquanto que do lado direito há apenas quadrados. Assim, sem perda de generalidade, podemos dizer que cada quadrado tem massa igual a 1.

Sendo T a massa de cada triângulo e C a massa de cada círculo, o equilíbrio de cada balança será pensado como uma equação. Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3T + C = 6 \\ 2T + 4C = 8 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema acima utilizando o método da substituição. Da primeira equação, temos que $C = 6 - 3T$. Utilizando essa informação na segunda equação, obtemos:

$$2T + 4(6 - 3T) = 8.$$

Portanto,

$$2T + 24 - 12T = 8 \Rightarrow 10T = 16 \Rightarrow T = 1,6.$$

Para achar o valor de C, basta substituir o valor encontrado para T na primeira equação:

$$C = 6 - 3T = 6 - 3 \times 1,6 = 6 - 4,8 = 1,2.$$

Para equilibrar a última balança, devemos pôr no prato da direita uma quantidade de quadrados com massa igual a

$$4T + 3C = 4 \times 1,6 + 3 \times 1,2 = 6,4 + 3,6 = 10.$$

Como cada quadrado tem massa 1, concluímos que a última balança será equilibrada caso sejam colocados 10 quadrados no prato da direita. □

2 Sugestões aos Professores

Separe dois tempos de 50 minutos cada para apresentar o conteúdo deste material. Use cada tempo para resolver três dos exercícios propostos. Faça com que a turma perceba que a ideia de utilizar letras para denotar valores desconhecidos é o que permite resolver os exercícios apresentados. Também faça-os ver que nem todo exercício que traz incógnitas deve ser pensado como um sistema de equações a ser resolvido. Muitas vezes, é impossível resolver (unicamente) um certo sistema, porém suas equações ainda permite calcularmos uma informação desejada. Pense em soluções alternativas para cada exercício, e apresente-as; por exemplo, resolva alguns deles utilizando o plano cartesiano.