Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Continuidade em um ponto - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de Fevereiro de 2023

1 Introdução

Em uma folha de papel [1], desenhe de forma arbitrária, sem tirar a caneta do papel, o gráfico de uma função, a qual denotaremos por f. Então, se I é o domínio dessa função [2], o seguinte fato ocorre: fixado um ponto $a \in I$, as imagens $f(x)$ tornam-se tão próximas de $f(a)$ quanto se queira, desde que $x \in I$ esteja suficientemente próximo de a.

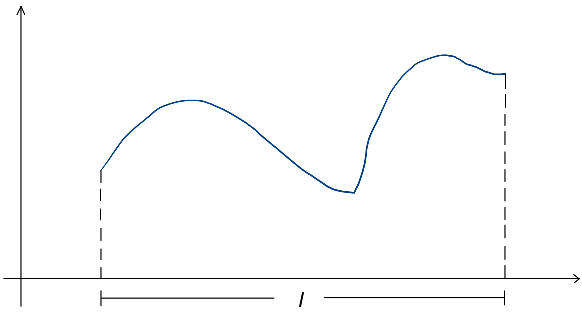

Figura 1: desenhando o gráfico de uma função contínua definida num intervalo.

Esse fato, que remonta à ideia de limite, expressa a noção de *continuidade*, o tema desse módulo.

Nesta aula, reservamos a 2ª seção às definições pertinentes, enquanto uma variedade de exemplos será apresentada na seção 3. Na 4ª seção, encerraremos com algumas propriedades das funções contínuas.

2 Continuidade em um ponto

Em referência à introdução, é razoável traduzir matematicamente a instrução "sem tirar a caneta do papel", aplicada ao

[1]A folha se identifica a uma porção do plano cartesiano, cujos eixos são induzidos por dois lados consecutivos da folha.

[2]I é a projeção do gráfico de f no eixo das abscissas.

desenho do gráfico da função f, como $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para todo $a \in I$. Desse modo, segue uma importante

Definição 1. *Seja f uma função real cujo domínio I é uma reunião de intervalos* [3]. *Diremos que f é* contínua *no ponto $a \in I$ se o limite de f em a existir e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Se ocorrer de f ser contínua em cada ponto a do seu domínio, diremos apenas que f é contínua*.*

Por outro lado, se f não é contínua no ponto a, diz-se que f é *descontínua* em a (veja a duas próximas figuras).

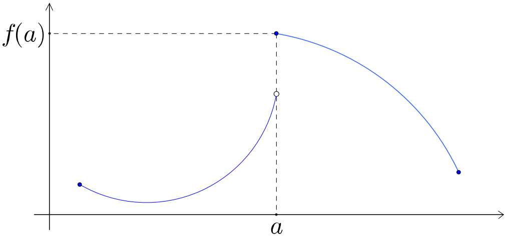

Figura 2: a função f é descontínua no ponto a, já que o limite de f em a não existe.

No sentido positivo, funções constantes e funções afins são contínuas de domínio $\mathbb{R}$ (vide exemplo (8) para uma generalização). Por outro lado, a regra

$$f(x) = \begin{cases} x/|x|, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

define uma função de domínio $\mathbb{R}$, descontínua no ponto $a = 0$. Basta ver que $\lim_{x\to 0^-} x/|x| = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} x/|x|$, de onde se conclui que o limite de f no ponto 0 não existe.

[3]Para evitar que a hipótese seja vazia, admitiremos tacitamente que tais intervalos são não degenerados.

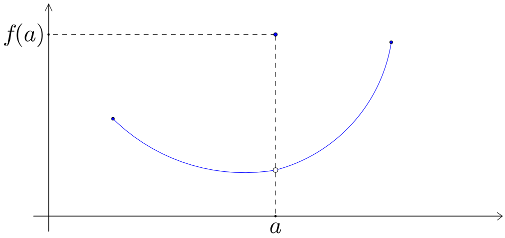

Figura 3: a função f é descontínua em a, pois, embora o limite de f em a exista, o valor desse limite difere de $f(a)$.

3 Exemplos

Suponha que a seja um ponto no domínio de uma função f tal que os limites laterais de f em a, que façam sentido, existam. Então, o seguinte detalhamento da definição (1) será útil: f é contínua no ponto a se, e só se,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \tag{2}$$

em que a primeira (resp. segunda) igualdade deve ser omitida caso o limite à esquerda (resp. à direita) de f em a não faça sentido. De fato, as relações em (2) equivalem à existência de $\lim_{x\to a} f(x)$ e à validade da igualdade (1).

Exemplo 2. *Verifique a continuidade das funções abaixo nos pontos indicados.*

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & se\ x \le 2 \\ 11-3x, & se\ x > 2 \end{cases}; \quad a = 2.$$

$$(b)\ \ g(x) = \begin{cases} \dfrac{8[1-\cos(x/2)]}{x^2}, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x = 0 \\ \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x+1/4}-1/2}, & se\ x > 0 \end{cases}; \quad a = 0.$$

Solução. No item (a), temos

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2+1) = 5 = f(2),$$

enquanto

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(11-3x) = 5 = f(2),$$

igualdades que garantem a continuidade de f no ponto 2.

Para o item (b), precisaremos de alguns artifícios para contornar a indeterminação $0/0$. Recordando que $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = 1/2$, a substituição $t = x/2$ dá

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{8[1-\cos(x/2)]}{x^2} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{8(1-\cos t)}{(2t)^2} \\
&= 2\lim_{t\to 0^-} \frac{1-\cos t}{t^2} \\
&= 1 = g(0).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a relação

$$(\sqrt{x+1/4}-1/2)(\sqrt{x+1/4}+1/2) = x,$$

válida para $x \geq -1/4$, mostra que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+1/4}-1/2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{x+1/4}+1/2)}{\cancel{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (x+1)(\sqrt{x+1/4}+1/2) \\
&= 1 = g(0).
\end{aligned}$$

Portanto, g também é contínua no ponto 0. □

Exemplo 3. *Mostre que as funções a seguir são* descontínuas *nos pontos indicados.*

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases};\ \ a = 0.$$

$$(b)\ \ g(x)=\begin{cases} x-2, & se\ x\le 1\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}, & se\ x>1\end{cases}\ ;\ \ a=1.$$

Solução. No primeiro item, levando em conta o limite trigonométrico fundamental, temos

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\tfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1\neq 0=f(0),$$

de sorte que $a=0$ é um ponto de descontinuidade de f.

Quanto ao segundo item, muito embora tenhamos

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1=g(1),$$

ocorre que

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{2x+1}=1/3\neq g(1),$$

de onde se vê que o limite de g no ponto 1 não existe. Logo, g também é descontínua em $a=1$. $\square$

Observação 4. *Uma função $f:I\to\mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a\in I$ precisamente quando uma das condições abaixo se verifica:*

(i) *$L=\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mas difere de $f(a)$.*

(ii) *O limite de f no ponto a não existe.*

No 1º caso, dizemos que a é um ***ponto de descontinuidade removível*** *da função f. A razão da nomenclatura está no fato de que, redefinindo o valor de f no ponto a de modo a ter $f(a)=L$, a (nova) função f é contínua no ponto a (pois removemos a descontinuidade presente na função inicial). Por exemplo, $a=0$ é um ponto de descontinuidade removível da função f do exemplo 3.*

Já no 2º caso, a é um ***ponto de descontinuidade essencial****. Realmente, a inexistência do limite de f em a persiste, seja qual for o valor que se atribua a $f(a)$. Assim é que $a=1$ é um ponto de descontinuidade essencial da função g do exemplo 3.*

Observação 5. *Em alguns problemas, pede-se para discutir se uma determinada função f é contínua num ponto a, sendo que apenas a regra da função é dada. Nesses casos, entendendo que o domínio D_f da função f é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a regra faz sentido, o primeiro ponto a se verificar é a pertinência $a \in D_f$.*

O próximo exemplo ilustra a situação comentada na última observação acima.

Exemplo 6. *Analise a continuidade da função f, definida pela regra $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, nos pontos -1 e 2.*

Solução. Aqui, o domínio D_f consiste dos números reais x satisfazendo $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \geq 0$, de forma que $D_f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Isso já nos mostra que não há sentido em verificar a continuidade da função f no ponto 2, uma vez que $2 \notin D_f$.

Por outro lado, $-1 \in D_f$ e podemos levar a verificação da continuidade de f em -1 adiante. Precisaremos do seguinte fato: *se g é uma função não negativa e existe* $\lim_{x \to a} g(x)$, *então*

$$\lim_{x \to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

Esse resultado segue tanto da proposição 6 da aula *Aplicações das Leis* do módulo *Leis do Limite - Parte 1*, quanto da combinação do exemplo 11 com o teorema 20 a seguir.

Desse modo, tomando $g(x) = x^2 - 4x + 3, x \in D_f$, vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1} f(x) &= \lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 - 4x + 3} \\
&= \sqrt{\lim_{x \to -1} (x^2 - 4x + 3)} \\
&= \sqrt{8} = f(-1),
\end{aligned}$$

o que prova a continuidade de f no ponto -1 (na verdade, substituindo -1 por um ponto $a \in D_f$ qualquer, o argumento anterior mostra que $f : D_f \to \mathbb{R}$ é contínua). $\square$

Exemplo 7. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e tal que $(x-1)(f(x)^2-3) < (x^2-5x+4)$ para cada número real $x > 1$, calcule $f(1)$.*

Solução. Uma vez que $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$ e $x-1>0$ se $x>1$, a desigualdade $(x-1)(f(x)^2-3) < (x^2-5x+4)$ equivale, para $x>1$, à desigualdade $f(x)^2-3 < x-4$, ou, ainda,

$$f(x)^2 < x-1$$

(para cada $x>1$). Fazendo $x \to 1^-$ na desigualdade anterior, obtemos $f(1)^2 = \lim_{x\to 1^-} f(x)^2 \le \lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$, pela permanência do sinal, de onde segue que $f(1)=0$. $\square$

Os próximos dois exemplos seguem das proposições 2 e 4 da aula *Aplicações das Leis* do módulo *Leis do Limite - Parte 1*.

Exemplo 8. *Funções polinomiais são contínuas.*

Exemplo 9. *Funções racionais são contínuas.*

Observe que, no enunciado do último exemplo acima, está implícito o fato de que o domínio maximal de uma função racional não contém os números reais que anulam o polinômio de seu denominador; assim, não faz sentido analisar a continuidade da função racional nesses pontos.

Pelo teorema 14 da aula *Limites Laterais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, temos o

Exemplo 10. *Funções exponenciais são contínuas.*

Para o próximo exemplo, precisaremos da desigualdade

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}, \tag{3}$$

válida para quaisquer números reais não negativos x,y. Para justificá-la, não há perda de generalidade em supor $x \ge y$. A partir daí,

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|} &\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} \le \sqrt{x-y} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \le \sqrt{x-y}^{\,2} \\
&\Leftrightarrow \cancel{x} - 2\sqrt{xy} + y \le \cancel{x} - y \\
&\Leftrightarrow \sqrt{xy} \ge y \Leftrightarrow xy \ge y^2 \\
&\Leftrightarrow x \ge y,
\end{aligned}
$$

de onde se vê que a primeira desigualdade é verdadeira.

Exemplo 11. *A função raiz quadrada é contínua.*

Solução. Fixado um número real $a \ge 0$, precisamos provar que

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}. \tag{4}$$

Ora, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon^2$ para ter, para $x \ge 0$,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{a}| \le \sqrt{|x-a|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$

em que a desigualdade (3) foi utilizada com $y = a$. Pela definição de limite, a relação (4) segue. $\square$

Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ e pontos $a < b$ tais que $[a,b] \subset I$, a expressão $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ chama-se *taxa de variação média de* f de a até b. (Quando $f(t)$ é a posição de uma certa partícula no instante t, essa taxa fornece a velocidade média da partícula entre os instantes a e b. Veja a aula *Velocidade Instantânea* do módulo *Limites - Parte 1*).

Por exemplo, funções afins têm taxa de variação média constante, enquanto a função quadrática $f(x) = x^2$ tem taxa de variação média de a até b igual a $a+b$, uma vez que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{b-a}} = b+a.$$

A próxima proposição explica nosso interesse nessa noção.

Proposição 12. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função cujas taxas de variação média formam um conjunto limitado* [4]*, então f é contínua.*

Prova. Digamos que, para quaisquer pontos $a \neq x$ no domínio I, tenhamos

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \leq K,$$

para uma certa constante real K. A desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|, \tag{5}$$

para quaisquer $a,x \in I$. Logo, fixando o ponto a, a igualdade $\lim_{x\to a} K|x - a| = 0$, juntamente com o teorema do confronto, garantem que $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, ou melhor, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Pela arbitrariedade do ponto a, concluímos que f é contínua. $\square$

Observação 13. *Evidentemente, dizer que as taxas de variação média de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ formam um conjunto limitado equivale a supor a existência de uma constante K tornando verdadeira a desigualdade* (5)*, quaisquer que sejam os pontos $a,x \in I$.*

Por exemplo, a função modular satisfaz (5) com $K = 1$. De fato, pela ($2^{\underline{a}}$ forma da) desigualdade triangular, temos $||x| - |a|| \leq |x - a|$, para quaisquer números reais a,x. Portanto, pela proposição 12, segue o

Exemplo 14. *A função modular é contínua.*

Exemplo 15. *As funções* sen *e* cos *são contínuas.*

Solução. Provaremos que as funções sen e cos também satisfazem a condição (5), com $K = 1$. Assim, mais uma vez, a continuidade dessas funções seguirá da proposição 12. Apresentaremos o argumento para a função seno, deixando para o leitor a tarefa de adaptá-lo para a função cosseno.

[4] Funções com essa propriedade costumam ser chamadas *Lipschitzianas*.

Na aula *O Teorema do Sanduíche* do módulo *Leis do Limite - Parte 1*, as relações obtidas na demonstração do teorema 2 permitem escrever a seguinte desigualdade

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|, \tag{6}$$

para cada número real θ. Pelas fórmulas trigonométricas da transformação da soma/diferença em produto, temos

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| &= 2\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \\
&= |x-a|,
\end{aligned}$$

para quaisquer $a,x \in \mathbb{R}$. Observe que a desigualdade $|\cos| \leq 1$ foi utilizada na 2ª linha do cálculo acima, ao passo que, na 3ª linha, utilizamos a relação (6) com $\theta = (x-a)/2$. Dessa forma, a demonstração está encerrada. $\square$

Observação 16. *De um ponto de vista geométrico, a quantidade* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *também pode ser interpretada como a inclinação da reta secante ao gráfico de* f *e passando pelos pontos* $(a,f(a))$ *e* $(b,f(b))$.

4 Operando com funções contínuas

Das regras aritméticas para limites, segue o

Teorema 17. *A soma, a diferença, o produto e o quociente (onde estiver definido) de funções contínuas ainda são funções contínuas.*

Corolário 18. *As demais funções trigonométricas,* tg , cotg , sec *e* cossec, *também são contínuas.*

Observação 19. *Vale uma versão do teorema 17 com "contínuas" substituída por "contínuas no ponto a".*

Grosso modo, a continuidade de uma função f no ponto a se expressa pela comutatividade dos símbolos "f" e "$\lim_{x\to a}$": $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$. Mais geralmente, temos o

Teorema 20. *Se a composição $f \circ g$ está definida, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = a$ e f é contínua no ponto a, então $\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(a)$. Resumidamente, vale*

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(\lim_{x\to b} g(x)),$$

desde que f seja contínua em $a = \lim_{x\to b} g(x)$.

Prova. [5] Como $\lim_{y\to a} f(y) = f(a)$, dada uma estimativa de erro $\varepsilon > 0$, existe um número positivo η satisfazendo

$$|y - a| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(a)| < \varepsilon, \tag{7}$$

sendo y um ponto no domínio de f. O leitor atento deve ter notado a ausência da condição "$0 < |y - a|$" na implicação acima, o que permite a igualdade $y = a$. A questão é que, agora, f está definida no ponto a e $y = a \Rightarrow |f(y) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ (i.e., para $y = a$, a implicação (7) é trivialmente verdadeira).

Por outro lado, a existência do limite $\lim\limits_{x\to b} g(x) = a$ garante a existência de $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: se x é um ponto no domínio da função g, então

$$0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |g(x) - a| < \eta. \tag{8}$$

Assim, as fórmulas (7) e (8) garantem que, para cada x no domínio da função $f \circ g$, tem-se

$$0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon,$$

o que demonstra a igualdade $\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(a)$. $\square$

Corolário 21. *A composta de funções contínuas ainda é uma função contínua.*

[5] Compare com a demonstração da *mudança de variável no limite* na aula *Teorema do Sanduíche* do módulo *Leis do Limite - Parte 2.*

Prova. De fato, seja b um ponto no domínio da função composta $f \circ g$, em que f e g são contínuas. Como g é contínua em b, temos $\lim_{x\to b} g(x) = g(b)$. Pelo teorema anterior e pela continuidade da função f no ponto $a = g(b)$, vem que

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = f(\lim_{x\to b} g(x)) = f(g(b)).$$

Assim, fica estabelecida a continuidade da função composta $f \circ g$. $\square$

Os resultados desta seção permitem construir muitos outros exemplos de funções contínuas. Como ilustração, a função f, dada por $f(x) = \dfrac{3^x \cos x + x}{2 - \operatorname{sen} x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua pelo teorema 17, ao passo que a função $g(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua pelo corolário 21 (justifique essas afirmações).

Observação 22. *O conceito de continuidade é local: se duas funções f e g coincidem numa vizinhança do ponto a, então f é contínua em a se, e só se, g é contínua em a. Em particular, as funções apresentadas no exemplo 2 são contínuas.*

Do teorema da permanência do sinal para limites, segue a

Proposição 23. *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in I$, então a desigualdade $f(a) < g(a)$ implica $f(x) < g(x)$, para todo $x \in I$ suficientemente próximo de a.*

Exemplo 24. *Se $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e k pertence a imagem de f, mostre que o conjunto solução da equação $f(x) = k$ possui uma menor e uma maior solução.*

Prova. Ora, o conjunto $S = \{x \in [c,d] \mid f(x) = k\}$ é limitado e não vazio por hipótese. Logo, os teoremas 7 e 9 da aula anterior garantem a existência de $\alpha = \inf S$ e $\beta = \sup S$. Além disso, pelas definições de ínfimo e supremo, é imediato que $\alpha, \beta \in [c,d]$. Se provarmos que $\beta \in S$ (resp. $\alpha \in S$), seguirá que β (resp. α) é o maior (resp. o menor) elemento de S.

Afirmação: existem elementos de S arbitrariamente próximos de β.

Pois, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, o fato de $\beta - \varepsilon$ não ser cota superior de S nos permite escrever $\beta - \varepsilon < \gamma \leq \beta$, para algum $\gamma \in S$. Daí, $|\beta - \gamma| < \varepsilon$, o que demonstra a afirmação.

Agora, se fosse $f(\beta) < k$ (resp. $f(\beta) > k$), teríamos, pela proposição 23, $f(x) < k$ (resp. $f(x) > k$), *para todo* $x \in [c,d]$ suficientemente próximo de β, digamos, $|x - \beta| < \epsilon$. Por outro lado, tomando $\gamma \in [c,d]$ como na afirmação e tal que $|\gamma - \beta| < \epsilon$, chegamos à contradição $k = f(\gamma) < k$ (resp. $k = f(\gamma) > k$). Assim, em qualquer caso só pode ser $f(\beta) = k$, o que dá $\beta \in S$, ou seja, $\beta = \max S$.

De forma análoga prova-se que $\alpha = \min S$. $\square$

Aplicaremos o resultado anterior ao estudo das funções periódicas. Lembre-se (veja a aula *Função Par, Ímpar e Periódica* do módulo *Funções - Parte 2*) de que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número não nulo T tal que $f(x + T) = f(x)$, para cada número real x. Nesse caso, dizemos que T é um *período* de f. Além disso, se T for o *menor* período positivo de f, diremos que T é *o* período da função f.

Por exemplo, as funções trigonométricas sen e cos são periódicas, sendo 2π o período delas. Mais ainda, para qualquer número inteiro k, o número $2k\pi$ também é um período dessas funções.

Todavia, uma função periódica não constante pode não admitir um menor período positivo. Por exemplo, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1$ se x é racional e $g(x) = 0$ caso x seja irracional [6]. Além de g ser descontínua em cada ponto da reta (exercício!), é fácil ver que *qualquer* número racional é um período para g. No sentido positivo, temos o seguinte

Teorema 25. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica. Se f não for constante, então f admite um menor*

[6] g é conhecida na literatura como *função de Dirichlet*.

período positivo T_0. Além disso, qualquer outro período T de f deve ser um múltiplo inteiro de T_0, ou seja, vale $T = nT_0$, para algum número inteiro n.

Antes de iniciar a demonstração, observe os seguintes fatos a respeito dos períodos de uma função periódica f (justificativas ao encargo do leitor):

(a) A soma/diferença de períodos de f ainda é um período de f.

(b) Se T é um período de f e n é um número inteiro, então nT também é um período de f.

Prova do teorema 25. Sejam $T > 0$ um período de f e $a \in (0,T)$ um ponto satisfazendo $f(a) \neq f(T)$ (lembre-se de que f não é constante). Pelo exemplo anterior, a equação $f(x) = f(a)$ admite uma menor solução s no intervalo $[0,T]$. Sendo $f(0) = f(T) \neq f(a) = f(s)$, vê-se que s é positivo.

Agora fixamos um número natural n de modo que $T/n < s$ e consideramos os n intervalos $I_1 = (0,T/n]$,$I_2 = (T/n,2T/n]$, $I_3 = (2T/n,3T/n]$, $\ldots$,$I_n = ((n-1)T/n,T]$. Obviamente, tais intervalos particionam o intervalo $(0,T]$.

Afirmação: há, no máximo, n períodos da função f no intervalo $(0,T]$.

Com efeito, em cada um dos intervalos I_k não há mais que um período da função. Caso contrário, teríamos períodos $T_1 < T_2$ pertencentes a algum I_k, de sorte que $T' := T_2 - T_1$ seria um período de f no intervalo $(0,s)$, pois $0 < T_2 - T_1 < T/n < s$. Mas, aí, a equação $f(x) = f(a)$ admitiria uma solução s' no intervalo $(0,T') \subset (0,s)$, contradizendo a minimalidade da solução s.

Verificada a afirmação, se T_0 é o menor período de f no intervalo $(0,T]$, é evidente que T_0 é o menor período positivo da função f.

Para demonstrar a 2ª parte, tomamos um período qualquer T de f e consideramos a "divisão com resto" de T por T_0. Mais precisamente, escrevemos $T = nT_0 + r$, em que n

é um inteiro e $0 \leq r < T_0$ [7]. Se tivéssemos $r > 0$, então r, sendo a diferença dos períodos T e nT_0, seria um período positivo da função f, menor que o período positivo mínimo T_0, o que é um absurdo. Portanto, $r = 0$ e $T = nT_0$, como queríamos. □

Utilizaremos o teorema anterior em nosso último

Exemplo 26. *Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2}), \tag{9}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Prova. Por um lado, é evidente que as funções constantes são soluções da equação funcional acima. Por outro, se alguma função contínua e não constante f fosse solução de (9), então, notando que 1 e $\sqrt{2}$ são períodos de f, valeria $1 = nT_0$ e $\sqrt{2} = mT_0$, para certos inteiros m,n, sendo T_0 o período de f. Mas, daí, teríamos $\sqrt{2} = m/n$, contradizendo a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Dessa forma, as funções constantes são as únicas soluções de (9). □

Dicas para o Professor

A atividade proposta na introdução nos apresenta, de forma intuitiva, uma característica fundamental das funções contínuas (cujos domínios são intervalos): *seus gráficos não possuem saltos* (por isso deve-se manter a caneta no papel durante o traçado).

De um ponto de vista físico, o desenho (vide figura 1) representa a trajetória "contínua" de uma partícula, sendo cada posição o "limite" das posições anteriores e posteriores dessa partícula. Tal condição compõe a definição de função contínua por meio da igualdade (1). Além disso, a curva desenhada tem, necessariamente, comprimento finito.

[7] Basta tomar n como a parte inteira de T/T_0 e pôr $r := T - nT_0$.

Por outro lado, muito embora aquela instrução da introdução nos faça produzir gráficos de funções contínuas, há muitas funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas cujos gráficos somos incapazes de esboçar. Por exemplo, a função $f : [0,1/10] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, se $0 < x \leq 1/10$, $f(0) = 0$. Apesar de f ser contínua (verifique!), pode-se mostrar que seu gráfico tem comprimento infinito! Veja a figura a seguir.

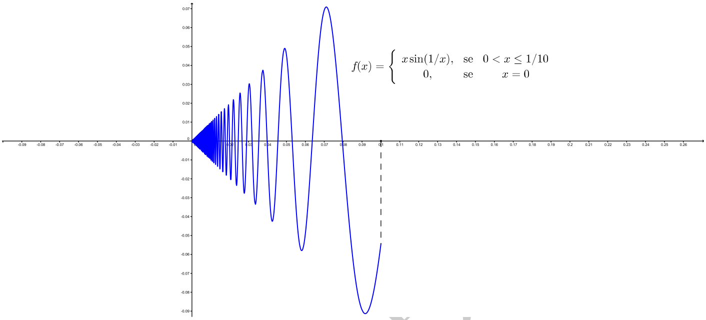

Figura 4: uma função contínua cujo comprimento do gráfico é infinito.

Segundo o *princípio da continuidade* de Leibniz [8], *a natureza não dá saltos*: *natura non facit saltus*. Pode-se interpretar essa máxima como: *a mudança de um estado para outro, num certo intervalo de tempo, implica na passagem de cada estado intermediário*.

Esse aspecto da continuidade, quando traduzido em linguagem matemática, pode ser lido da seguinte forma: *se uma função contínua definida num intervalo assume dois valores, ela também deve assumir cada valor intermediário*. Trataremos desse importante resultado, chamado *teorema do valor intermediário*, e de algumas de suas aplicações em nossa próxima aula.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

[8] Leibniz e Newton são considerados os "criadores" do Cálculo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.
2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.