Material Teórico - Módulo Equações Algébricas - Raízes e Coeficientes

Equações com Coeficientes Inteiros

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de dezembro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

No módulo anterior, “Equações Algébricas - Propriedades das Raízes”, tratamos da teoria de equações algébricas (polinomiais), ou seja, $f(x) = 0$ em que $f(x)$ é um polinômio com coeficientes complexos. Nesta aula nos restringiremos ao caso em que os coeficientes do polinômio são números inteiros. Neste caso, há um método bastante simples de calcular todas as possíveis raízes *racionais* de $f(x)$ (caso exista alguma).

Normalmente isso isso pode ser usado como o primeiro passo de uma heurística[1] para encontrar todas as raízes de um polinômio. Isso porque, se encontrarmos pelo menos uma raiz, r, (seja ela racional ou não), podemos dividir o polinômio por $x-r$, obtendo $f(x) = (x-r)\,g(x)$ e podemos continuar nossa busca procurando raízes de $g(x)$. Trata-se de uma heurística por dois motivos: (i) é possível que $f(x)$ não tenha raízes racionais e, neste caso, o método não facilitará em nada a busca pelas raízes irracionais; (ii) quando encontramos todas as raízes racionais $r_1, \ldots, r_k$ de $f(x)$, podemos facilmente calcular o polinômio $h(x)$ tal que $f(x) = (x - r_1)\ldots(x - r_k)\,h(x)$ e como $h(x)$ tem grau menor do que $f(x)$ é razoável esperar que seja mais fácil as demais raízes; contudo isso não é garantido.

De fato, o argumento acima foi usado várias vezes em aulas anteriores, em momentos nos quais “chutamos” uma raiz de um polinômio, sem explicar de onde veio o bom chute. Aqui, queremos trocar tal “chute” por algo mais sistemático.

Exemplo 1. *Calcule as raízes da equação* $2x^3-x^2-2x+1 = 0$.

Solução. Neste exemplo, chutamos que 1 seja uma raiz. Isso é um bom chute, pois a soma dos coeficientes do polinômio $f(x) = 2x^3-x^2-2x+1$ é zero, logo, $f(x) = 2-1-2+1 = 0$.

Agora que sabemos que 1 é raiz, podemos fatorar $f(x)$ usando o método de Briot-Ruffini ou a Divisão Euclidiana, dividindo $f(x)$ por $x-1$. Sugerimos que você tente fazer

[1] Heurística é um procedimento que nos *ajuda* a encontrar soluções adequadas para um problema, mas não garante com toda certeza que uma solução correta será obtida.

isso, antes de ver a resposta abaixo. Se necessário, revise o módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do EM. Concluí-se que

$$f(x) = (x-1)(2x^2 + x - 1).$$

Para calcular as demais raízes de $f(x)$ basta resolver a equação de segundo grau $2x^2 + x - 1 = 0$, que tem como raízes os números -1 e $1/2$. Assim, as raízes de $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ são 1, -1 e $1/2$. $\square$

No exemplo acima, não fica claro porque decidimos testar o número 1 como possível raiz. O resultado a seguir nos diz todos os possíveis candidatos ("chutes") que precisamos testar a fim de obter todas as raízes *racionais* de um polinômio com coeficientes inteiros.

Lembre-se de que um número racional, digamos p/q, está escrito na sua forma irredutível quando p e q são números inteiros relativamente primos em si, ou seja, tais que o máximo divisor comum de p e q é igual a 1.

Teorema 2 (Teste das Raízes Racionais). *Se um número racional escrito em sua forma irredutível, p/q, é raiz da equação*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_n, \ldots, a_0$ são número inteiros e $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração. Se p/q é raiz, então podemos substituir x por p/q na equação do enunciado a fim de obter:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0. \quad (1)$$

Multiplicando ambos os lados por q^n obtemos

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_n p^n &= -a_{n-1} p^{n-1} q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n \\ &= -q\left(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Observe que os fatores q e $a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}$ à direita são números inteiros. Logo, q é um divisor do número (também inteiro) a_np^n. Como $\text{mdc}(q, p) = 1$, temos que $\text{mdc}(q, p^n) = 1$. Logo, q é um divisor de a_n.

Analogamente, partindo da equação (1), também podemos escrever

$$\begin{aligned} a_0q^n &= -a_np^n - a_{n-1}p^{n-1}q - \ldots - a_1pq^{n-1} \\ &= -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}) \end{aligned}$$

Daí, também podemos concluir que p é um divisor de a_0q^n e, como $\text{mdc}(p,q) = 1$, concluímos que $\text{mdc}(p,q^n) = 1$ e p é divisor de a_0. $\square$

Observe que o teste acima funciona como uma primeira peneira para a busca das raízes racionais. Ele nos dá uma condição que é necessária para ser raiz racional, mas que não é suficiente.

Exemplo 3. *Calcule as raízes da equação* $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$.

Solução. Seja $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$. Como tal polinômio possui coeficientes inteiros, podemos usar o teste das raízes racionais para decidir se ele possui alguma raiz racional. Sejam

$$a_3 = 3, \quad a_2 = -7, \quad a_1 = 8 \quad a_0 = -2.$$

Caso p/q seja uma raiz racional da equação do enunciado, onde p e q são inteiros relativamente primos entre si, é necessário que p seja um divisor de a_0 e q seja um divisor de a_3. Logo,

$$p \in \{\pm 1, \pm 2\} \quad \text{e} \quad q \in \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Logo,

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3} \right\}.$$

Ou seja, temos 8 possíveis candidatos a raízes racionais. O teste não nos garante que esses números sejam mesmo raízes.

Na verdade, o que ele nos diz é que não há raízes racionais fora deste conjunto. Para saber se algum dos 8 candidatos é raiz, precisamos testá-los um a um. Vejamos:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 - 7 + 8 - 2 = 2 \\ f(-1) &= -3 - 7 - 8 - 2 < 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{9} - \frac{7}{9} + \frac{8}{3} - 2 = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Poderíamos testar cada um dos demais números, mas como já encontramos uma raiz, outra opções é usar Briot-Ruffini para dividir $f(x)$ por $x - \frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 8 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 3 & -6 & 6 & \boxed{0} \end{array}.$$

Assim, $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 - 6x + 6)$. Resolvendo a equação de segundo grau $3x^2 - 6x + 6 = 0$, obtemos $\Delta = -36$ e que as demais duas raízes são $1 + i$ e $1 - i$. $\square$

Exemplo 4. *Verifique se a equação $3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 = 0$ tem raízes racionais e quais são.*

Solução. Faremos o mesmo que no exemplo anterior. Seja $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6$. Como tal polinômio possui coeficientes inteiros, pelo teste das raízes racionais, se p/q é uma raiz racional de $f(x)$, onde p e q são inteiros relativamente primos entre si, é necessário que p seja um divisor de 6 e q seja um divisor de 3. Sendo assim,

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \quad \text{e} \quad q \in \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Agora, para cada valor de p, tomamos apenas os valores de q que são relativamente primos com ele e montamos a fração p/q. Isso nós dá os seguintes possíveis valores para p/q:

$$\pm 1,\ \pm \frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm \frac{2}{3},\ \pm 3,\ \pm 6.$$

(Veja que é desnecessário fazer $\pm\frac{3}{3}$ e $\pm\frac{6}{3}$, pois mdc(3,3) $\neq 1$ e mdc(6,3) $\neq 1$; se considerarmos essas frações estaremos apenas repetindo os valores ± 1 e ± 2, que já havíamos encontrado).

Resta testar cada um dos valores acima. Veja que não precisamos calcular exatamente o valor de $f(p/q)$ em todos os casos. Precisamos apenas decidir se $f(p/q)$ é igual ou não a zero. Por exemplo, observe que se $x < 0$, então $x^3 < 0$ e $x^2 > 0$. Logo, $3x^3 < 0$, $-2x^2 < 0$, $9x < 0$ e $-6 < 0$. Consequentemente, $3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 < 0$. Assim, para o polinômio deste exemplo, sempre que p/q for negativo, temos que $f(p/q)$ é negativo, logo, é diferente de zero. Basta então tetar os valores positivos de p/q.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 3 - 2 + 9 - 6 = 4,\\
f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{3}{27} - \frac{2}{9} + \frac{9}{3} - 6 = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - 3 \neq 0,\\
f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{24}{27} - \frac{8}{9} + 6 - 6 = 0,\\
f(2) &= 24 - 8 + 18 - 6 = 28 \neq 0,\\
f(3) &= 54 - 18 + 27 - 6 = 57 \neq 0,\\
f(6) &= 3 \cdot 216 - 2 \cdot 36 + 9 \cdot 6 - 6 = 648 - 72 + 54 - 6 > 0.
\end{aligned}
$$

Veja que nas últimas três equações, não seria necessário calcular exatamente o valor de $f(2)$, $f(3)$ e $f(6)$. No caso de $f(2)$, bastaria perceber que $24 - 8 > 0$ e $9 - 6 > 0$, de modo que $24 - 8 + 18 - 6 > 0$ (logo, é diferente de zero). O análogo se aplica para $f(3)$ e $f(4)$.

Com isso, concluímos que a única raiz racional de $f(x)$ é $2/3$.

Caso você queira calcular as demais raízes de $f(x)$, basta dividir $f(x)$ por $x - 2/3$, obtendo um polinômio de grau 2, $g(x)$, tal que $f(x) = (x - 2/3)\, g(x)$ e, em seguida, resolver a equação de segundo grau $g(x) = 0$. Como já testamos todas os possíveis candidatos a raízes racionais, já sabemos que esta equação não terá raízes racionais. Então, para o que o exercício pede, não é necessário calcular as demais raízes. Mas se você fizer isso, irá obter $q(x) = 3x^2 + 9$ que possui as raízes complexas $i\sqrt{3}$ e $-i\sqrt{3}$. $\square$

Observação 5. *Na aula "Dispositivo de Briot-Ruffini" do módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do EM, vimos que tal dispositivo/método é útil não apenas para dividir um polinômio $f(x)$ por fator linear $x - r$, mas também é computacionalmente eficiente para calcular calcular o valor de $f(r)$. De fato, aplicar Briot-Ruffini consome menos operações aritméticas do que calcular $f(r)$ por substituição direta e o teorema do resto nos diz que $f(r)$ é igual ao resto de $f(x)$ por $x - r$. Por exemplo, para calcular $f(6)$ no exemplo 4 poderíamos fazer:*

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 3 & -2 & 9 & -6 \\ & & 18 & 96 & 630 \\ \hline & 3 & 16 & 105 & \boxed{624} \end{array}.$$

O quadro acima nos mostra que $f(6) = 624 \neq 0$.

Exemplo 6. *Calcule as raízes da equação*

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Solução. Apesar de que a equação do enunciado é de grau quarto, podemos resolver essa questão facilmente usando o teste das raízes racionais. Veja que se p/q é uma raiz racional em sua forma irredutível, temos que p é divisor de 3 e q é divisor de 1. Logo,

$$p \in \{\pm 1, \pm 3\} \quad \text{e} \quad q \in \{\pm 1\}.$$

Logo, há apenas 4 candidatos a raízes racionais e todos são inteiros:

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Começando a testar os candidatos, temos:

$$f(1) = 1 + 2 - 2 + 2 - 3 = 0$$

Uma vez que já encontramos uma raiz (por sorte, na primeira tentativa), podemos fatorar $f(x)$ e continuar a trabalho com um polinômio de grau menor. Como 1 é raiz, iremos dividir $f(x)$ por $x-1$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini temos:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ & & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}.$$

Logo,

$$f(x) = (x-1)(x^3+3x^2+x+3).$$

Seja $g(x) = x^3+3x^2+x+3$. Como toda raiz de $g(x)$ é raiz de $f(x)$, temos que as raízes racionais de $g(x)$ também pertencem ao conjunto $\{\pm 1, \pm 3\}$. A priori, precisamos verificar cada um dos quatro valores (inclusive o 1), pois o fato de 1 ser raiz de $f(x)$ não exclui a possibilidade dele também ser raiz de $g(x)$ (neste caso, ele seria uma raiz de multiplicidade maior ou igual a 2 para $f(x)$). Contudo, como todos os coeficientes de $g(x)$ são positivos, temos que para $r>0$ vale $g(r)>0$. Assim, $g(x)$ não possui raiz positiva. Logo, as únicas candidatas a racionais passam a ser -1 e -3. Testando, temos:

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1+3-1+3 = 4 \neq 0 \\ g(-3) &= -27+27-3+3 = 0. \end{aligned}$$

Logo, -3 é a única raiz racional de $g(x)$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir $g(x)$ por $x+3$, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}.$$

Logo,

$$g(x) = (x+3)(x^2+1).$$

Ou seja,

$$f(x) = (x-1)(x+3)(x^2+1).$$

Segue que a últimas duas raízes de $f(x)$ são i e $-i$ (as raízes de $x^2+1=0$). Assim, as raízes da equação do enunciado são 1, -3, i e $-i$. □

Dicas para o Professor

O assunto deste material pode ser abordado em dois encontros de 50 minutos, com a disponibilidade de tempo adicional para exercícios caso seja necessário.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais e alguns exercícios deste material foram extraídos de lá. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática.* Zahar, Rio de Janeiro, 2012.