Material Teórico - Módulo de Frações, O Primeiro Contato

Frações e Suas Operações - Parte 1

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autores: Prof. Bruno Holanda & Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

24 de agosto de 2025

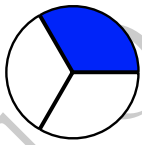
Portal OBMEP

Nos módulos anteriores, estudamos um pouco sobre os números naturais, suas operações e as principais propriedades dessas operações. A partir de agora, vamos conhecer e estudar as propriedades de números mais gerais, que representam quantidades que não são inteiras.

1 Noções básicas de frações

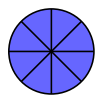
Imagine que você e mais dois amigos saíram para comer uma pizza. Se todos concordaram em comer quantidades iguais, a *fração* comida por cada um foi **um terço** (ou seja, *uma parte em três*) da pizza. O símbolo matemático que denota essa fração é $\frac{1}{3}$.

Podemos representar a divisão da pizza entre os três amigos por um círculo dividido em três partes iguais. Assim, a fração $\frac{1}{3}$ representará uma dessas partes.


$= \frac{1}{3}$

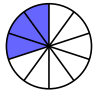
Mais geralmente, sejam a e b números naturais tais que $b \neq 0$ e $a \leq b$. Se dividirmos um círculo em b partes iguais e tomarmos a dessas partes, teremos uma representação geométrica para a fração $\frac{a}{b}$. Veja alguns exemplos nesse sentido:

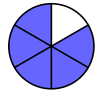
$\frac{2}{5} =$

$\frac{8}{8} =$ 

$\frac{3}{7} =$

$\frac{3}{6} =$

$\frac{3}{10} =$ 

$\frac{5}{6} =$ 

Portal OBMEP

Assim, ao escrevermos uma fração $\frac{a}{b}$, com $a \leq b$, pensamos na operação de dividir um todo em b partes e tomar a dessas partes.

Podemos extrapolar a discussão acima, considerando, o conjunto de todas as frações $\frac{a}{b}$, em que a e b são número naturais, sendo $b > 0$, mas *não necessariamente* $a \leq b$. Nesse sentido, a fração $\frac{a}{b}$ deve ser interpretada exatamente da mesma forma que antes: dividimos um todo em b partes iguais e, em seguida, tomamos a cópias dessas partes.

Por exemplo, a fração $\frac{12}{3}$ representa 12 cópias de uma parte que, por sua vez, representa um terço do todo; como cada 3 cópias de um terço do todo dão o todo, e $12 = 4 \times 3$, concluímos que as 12 cópias representarão 4 todos:

$$\frac{12}{3} = 4.$$

Observação 1. *Esse tipo de raciocínio continua válido quando o natural a não é múltiplo do natural b. Assim, a fração $\frac{13}{3}$ representa 13 cópias de uma parte que, a seu turno, representa um terço do todo; como cada 3 cópias de um terço do todo dão o todo, e $13 = 4 \times 3 + 1$, concluímos que as 13 cópias representarão 4 todos mais $\frac{1}{3}$:*

$$\frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}.$$

Teremos muito mais a dizer sobre isso nos próximos materiais, quando estudarmos operações aritméticas *com frações.*

Retomando a discussão que levou à igualdade $\frac{12}{3} = 4$, observamos que

toda fração $\frac{a}{b}$, com $a \geq b$, está associada a um processo de divisão.

Isso fica bastante claro na igualdade $\frac{12}{3} = 4$ quando vemos que a divisão $12 \div 3 = 4$ conta quantas vezes as 3 partes que compõem o todo cabem em 12 partes.

Mais geralmente,

todo número natural é uma fração.

Portal OBMEP

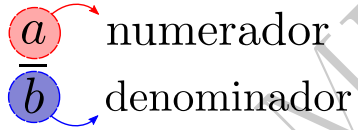
De fato, sendo a um natural, temos

$$\frac{a}{1} = a,$$

uma vez que a cópias do todo dão a todos (ou, se você preferir, $a \div 1 = a$).

2 Frações equivalentes e irredutíveis

Na fração $\frac{a}{b}$, os números naturais a e b são denominados, respectivamente, o **numerador** e o **denominador** da fração.



Por exemplo, na fração $\frac{1}{2}$, o numerador é 1 e o denominador é 2; já na fração $\frac{12}{3}$, o numerador é 12 e o denominador é 3.

Por outro lado,

existem várias formas de representar uma mesma fração.

Por exemplo, do mesmo modo que podemos obter o número 4 fazendo a divisão de 12 por 3, também obtemos esse valor dividindo 20 por 5. Assim, em termos de frações, temos

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{20}{5}.$$

Agora que você entendeu que frações aparentemente diferentes podem iguais, você deve estar se questionando:

como podemos saber quais são as diferentes formas de representar uma mesma fração?

A resposta a essa pergunta é a seguinte:

quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, o resultado será uma outra representação da mesma fração.

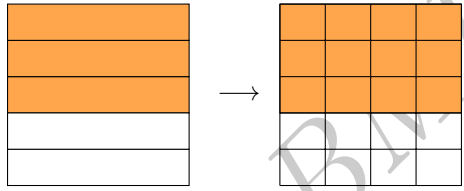
Portal OBMEP

Nesse caso, dizemos que as duas frações são **equivalentes**.

Exemplo 2. Na fração $\frac{3}{5}$, multiplicando o numerador e o denominador por 4, obtemos:

$$\frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{4 \times 5} = \frac{12}{20}.$$

Podemos entender o porquê disso observando a figura a seguir, na qual o quadrado da esquerda representa a fração $\frac{3}{5}$ e o da direita representa a fração $\frac{12}{20}$. Note que as áreas pintadas nos dois quadrados são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das duas frações.

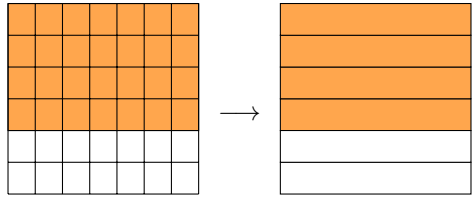


Aritmeticamente, 3 partes em 5 partes iguais são o mesmo que 12 partes em 20 iguais porque, se dividirmos cada uma das 5 partes iguais originais em quatro partes também iguais, as 3 partes que tomamos originalmente tornam-se $4 \times 3 = 12$ partes, das novas $4 \times 5 = 20$ partes.

Exemplo 3. Dividindo o numerador e o denominador da fração $\frac{28}{42}$ por 7, obtemos:

$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 7}{42 \div 7} = \frac{4}{6}.$$

A interpretação geométrica da equivalência entre essas duas frações é dada na figura a seguir, na qual o quadrado da esquerda representa a fração $\frac{28}{42}$ e o da direita representa $\frac{4}{6}$.



Portal OBMEP

O argumento aritmético também é similar ao do exemplo anterior: agrupando as 42 partes iguais originais de 7 em 7, nós as transformamos em $42 \div 7 = 6$ partes; por sua vez, as 28 partes que tomamos originalmente tornam-se $28 \div 7 = 4$ partes, de modo que $\frac{28}{42} = \frac{4}{6}$.

Em geral, é claro que, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural não nulo, aumentamos as quantidades de partes em que o todo foi dividido e de partes tomadas.

Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural não nulo (contanto que os resultados sejam naturais), diminuímos essas mesmas quantidades. Nesse último caso, dizemos que **simplificamos** a representação da fração.

Dessa forma, voltando ao exemplo anterior, vemos que $\frac{4}{6}$ é uma *simplificação* da fração $\frac{28}{42}$. Outra forma comum de expressar esta operação é dizer que $\frac{4}{6}$ é uma **forma reduzida** da fração $\frac{28}{42}$.

Observe ainda que, dividindo numerador e o denominador da fração $\frac{4}{6}$ por 2, executamos uma simplificação adicional da fração $\frac{4}{6}$, obtendo a fração $\frac{2}{3}$ como resultado. Contudo, agora não podemos mais simplificar a fração $\frac{2}{3}$, uma vez que não existe nenhum número natural maior que 1 que divida 2 e 3 ao mesmo tempo.

Isso acontece porque 2 e 3 são *primos entre si*, isto é, $\text{mdc}\,(2{,}3) = 1$. Por conta disso, dizemos que $\frac{2}{3}$ é a **representação irredutível** da fração $\frac{28}{42}$, ou simplesmente (sempre que não houver perigo de confusão) que $\frac{2}{3}$ é uma **fração irredutível**.

A figura abaixo explica, geometricamente, a equivalência entre as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$.

Portal OBMEP

Generalizando a discussão anterior, veja que toda fração irredutível $\frac{a}{b}$ é tal que seus numerador e denominador não são divisíveis por um mesmo número natural maior que 1, ou seja, a e b são *primos entre si*:

$$\frac{a}{b} \text{ irredutível } \Rightarrow \text{ mdc}\,(a,b) = 1.$$

O *método da chave* (ou *método das divisões sucessivas*) é uma importante estratégia de simplificação de uma fração à sua forma irredutível. De fato, o método da chave é um algoritmo que permite encontrar o mdc de dois números naturais a e b.

Quando a e b são o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$, respectivamente, aplicamos o método da chave para encontrar $d = \text{mdc}\,(a,b)$. Uma vez feito isso, os naturais $a \div d$ e $b \div d$ não têm fatores comuns maiores que 1, isto é, são primos entre si; dessa forma, a fração $\frac{a \div d}{b \div d}$ é a forma irredutível de $\frac{a}{b}$.

Exemplo 4. Aplicando o método da chave para encontrar mdc (18,42), temos

	1	2
42	28	14
14	0	

Portanto, mdc (28,42) = 14.

Agora, para obter a forma irredutível da fração $\frac{28}{42}$, dividimos seus numerador e denominador diretamente por 14, em vez de primeiro dividi-los por 7 e depois por 2. Agindo desse modo, obtemos:

$$\frac{28}{42} = \frac{28 \div 14}{42 \div 14} = \frac{2}{3}.$$

Terminamos este material com dois exemplos retirados de olimpíadas de Matemática.

Exemplo 5 (Olimpíada Brasileira de Matemática)**.** Assinale o item que traz uma simplificação da fração

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004}.$$

Portal OBMEP

(a) 2004.

(b) $\frac{113}{355}$.

(c) $\frac{1}{2004}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

(e) $\frac{2}{7}$.

Solução. Observando que

$$2004 + 2004 = 2 \cdot 2004$$

e

$$2004 + 2004 + 2004 = 3 \cdot 2004,$$

temos

$$\frac{2004 + 2004}{2004 + 2004 + 2004} = \frac{2 \cdot \cancel{2004}}{3 \cdot \cancel{2004}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (d). □

Exemplo 6 (Olimpíada Internacional de Matemática)**.** Explique por que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível, para todo n natural.

Solução. Aplicando o método da chave, temos

	1	2	$7n+1$
$21n+4$	$14n+3$	$7n+1$	1
$7n+1$	1	0	

Então, $\text{mdc}\,(21n+4, 14n+3) = 1$, independentemente do valor natural de n, de modo que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ sempre é irredutível. □

Portal OBMEP

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores façam outros exemplos e explorem bastante os conceitos de frações equivalentes e frações irredutíveis. No exemplo 5, é muito comum os alunos cometerem o seguinte erro:

$$\frac{\cancel{2004} + \cancel{2004}}{\cancel{2004} + \cancel{2004} + 2004} = \frac{1}{2004}.$$

Recomendamos que os professores fiquem atentos a isso e corrijam esse tipo de erro o quanto antes. Entender esses conceitos corretamente é fundamental para o próximo material, que trata sobre as operações com frações.

Portal OBMEP