

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Monotonicidade, Máximos e Mínimos - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autores: Profs. Angelo Papa Neto

Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Setembro de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Apresentaremos alguns exemplos relacionados ao conteúdo de monotonicidade e valores extremos de funções.

Recorde que, dados uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e pontos distintos $x, y \in I$, o sinal da razão

$$R_f(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

controla a monotonicidade de f . Por exemplo, f é crescente se, e só se, $R_f(x, y)$ é positiva para quaisquer $x \neq y$ em I . Confira a 1ª seção da parte 1 deste material.

1 Exemplos

Exemplo 1. Encontre os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 + ax$, é crescente.

Solução. Mostraremos que a função f é crescente se, e somente se, $a \geq 0$. Para tanto, iniciaremos com o cálculo de R_f . Dados reais $x \neq y$, temos

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= \frac{(y^3 + ay) - (x^3 + ax)}{y - x} \\ &= \frac{(y^3 - x^3) + (ay - ax)}{y - x} \\ &= \frac{(y - x)(x^2 + xy + y^2) + (y - x)a}{y - x} \\ &= \frac{\cancel{(y - x)}(x^2 + xy + y^2 + a)}{\cancel{(y - x)}} \\ &= x^2 + xy + y^2 + a. \end{aligned}$$

Como

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \quad (1)$$

e o 2º membro dessa igualdade é positivo para $x \neq y$, segue do cálculo acima que $R_f(x, y)$ também é positivo se $a \geq 0$. Portanto, f é crescente se $a \geq 0$.

Por fim, se $a < 0$, mostraremos que f não é crescente exibindo um número real positivo x tal que $f(x) < f(-2x)$.

De fato, segue da relação (1) que

$$R_f(x, -2x) = \left(x - \frac{2x}{2}\right)^2 + \frac{3(-2x)^2}{4} + a = 3x^2 + a.$$

Como $a < 0$, temos

$$3x^2 + a < 0 \Leftrightarrow x^2 < -\frac{a}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{a}{3}} < x < \sqrt{-\frac{a}{3}}.$$

Portanto, tomando, $x = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{a}{3}}$, por exemplo¹, obtemos $R_f(x, -2x) < 0$, ou seja, $f(x) < f(-2x)$. □

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$. Explique, com justificativa, se f é monótona.

Solução. Precisamos analisar o sinal da razão $R_f(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, para quaisquer reais distintos x e y . Temos

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= \frac{1}{y-x} \left(\frac{y^3}{y^2+1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{y^3(x^2+1) - x^3(y^2+1)}{(y-x)(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{y^3x^2 + y^3 - x^3y^2 - x^3}{(y-x)(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{(y-x)x^2y^2 + (y-x)(x^2 + xy + y^2)}{(y-x)(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{\cancel{(y-x)}(x^2y^2 + x^2 + xy + y^2)}{\cancel{(y-x)}(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{x^2y^2 + x^2 + xy + y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}. \end{aligned}$$

¹Note que $x = 0$ dá $3x^2 + a = a < 0$; no entanto, $x = 0$ não é uma escolha possível, pois queremos que x seja positivo, a fim de que tenhamos $x > -2x$.

Como $x^2y^2 \geq 0$, x^2+1 , $y^2+1 > 0$ e já sabemos que x^2+xy+y^2 é positivo por (1), obtemos

$$R_f(x, y) = \frac{x^2y^2 + x^2 + xy + y^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} > 0.$$

Sendo $R_f(x, y)$ positiva para todos x e y distintos, concluímos que f é crescente. $\square$

Exemplo 3. *Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual tem a maior área?*

Solução. Se um retângulo tiver base x e altura y , então seu perímetro (que é igual à soma das medidas de seus lados) valerá $2x + 2y$.

Fixado um número real positivo p , considere todos os possíveis retângulos cujo perímetro é p , ou seja, retângulos com base x e altura y tais que

$$2x + 2y = p. \quad (2)$$

Cada um de tais retângulos tem área $A = xy$. Da igualdade (2), segue que $y = \frac{p}{2} - x$. Substituindo essa expressão para y naquela para a área A , obtemos $A(x) = x \left(\frac{p}{2} - x \right)$, ou seja,

$$A(x) = -x^2 + \frac{p}{2} \cdot x. \quad (3)$$

Assim, a área de cada retângulo de perímetro p pode ser expressa como uma função do comprimento de sua base x , dada pela expressão (3). Essa função é quadrática, com $a = -1 < 0$, $b = \frac{p}{2}$ e $c = 0$. Logo, pela proposição 7 da parte 1 dessa aula, $A(x)$ admite valor máximo, dado por $-\frac{\Delta}{4a}$, o qual é assumido apenas quando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{p/2}{2(-1)} = \frac{p}{4}.$$

Observe que, nesse caso, $y = \frac{p}{2} - x = \frac{p}{4} = x$. Portanto, dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o que tem área máxima é o quadrado. $\square$

Exemplo 4 (ENQ - 2020.1). Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^4 + \frac{2b}{x^2}$, em que a e b são números reais positivos.

(a) Calcule $f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)$.

(b) Use a desigualdade das médias para provar que o valor encontrado no item anterior é o valor mínimo de f .

Solução. Observando que

$$f(x) = \frac{ax^6 + 2b}{x^2},$$

temos

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right) &= \frac{a\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^6 + 2b}{\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^2} \\ &= \frac{a \cdot \frac{b}{a} + 2b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \\ &= \frac{3b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = 3\sqrt[3]{ab^2}. \end{aligned}$$

Para o item (b), utilizaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para três números reais positivos u, v, w :

$$\frac{u + v + w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw}.$$

Dado $x > 0$, sejam $u = ax^4$ e $v = w = b/x^2$, de sorte que

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + 2\frac{b}{x^2} = u + v + w \\ &= 3 \cdot \frac{u + v + w}{3} \geq 3\sqrt[3]{uvw} \\ &= 3\sqrt[3]{ab^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) \geq f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right).$$

Portanto, $\sqrt[3]{ab^2}$ é o valor mínimo de f . $\square$

Exemplo 5. O conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ é particionado em duas sequências,

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad e \quad b_1 > b_2 > \dots > b_n.$$

Prove que

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2. \quad (4)$$

Solução. Afirmamos que cada conjunto $\{a_r, b_r\}$ consiste de um número do intervalo $[1, n]$ e de um número do intervalo $[n+1, 2n]$. De outro modo, não é possível que tenhamos $a_r, b_r \in [1, n]$ ou $a_r, b_r \in [n+1, 2n]$. Com efeito, basta argumentar em relação ao intervalo $[1, n]$, já que o argumento relativamente a $[n+1, 2n]$ é análogo².

Se tivéssemos $a_r, b_r \leq n$, o fato de que $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ ser crescente e $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ ser decrescente implicaria $a_i, b_j \leq n$ para quaisquer $i \leq r \leq j$. Daí, haveria pelo menos r termos a_i e pelo menos $n - r + 1$ termos b_j no intervalo $[1, n]$. Mas isso é impossível, pois esses termos totalizariam pelo menos $n+1$ números naturais, enquanto há exatamente n naturais em $[1, n]$.

Com a afirmação justificada, após substituirmos cada módulo $|a_i - b_i|$ no primeiro membro de 4 pelo valor adequado $\pm(a_i - b_i)$, as parcelas positivas serão precisamente os números naturais k tais que $n+1 \leq k \leq 2n$. Portanto,

$$\begin{aligned} & |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} k - \sum_{l=1}^n l = \sum_{l=1}^n (n+l) - \sum_{l=1}^n l \\ &= \sum_{l=1}^n n = n^2. \end{aligned}$$

²Para um argumento alternativo, vide exemplo 2.11 da referência [2].

□

Exemplo 6 (OCM - 1999). *Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(mn) = f(m) + f(n)$ sempre que m e n forem primos entre si. Um natural m é dito um ponto de estrangulamento de f se $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$ e $m > n \Rightarrow f(m) > f(n)$. Se f possuir infinitos pontos de estrangulamento, mostre que f é crescente.*

Solução. Dados naturais $m < n$, precisamos mostrar que $f(m) < f(n)$. Defina uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pela regra $a_k = mnk + 1$. Observe que (a_k) é crescente e que cada termo dessa sequência é relativamente primo com os números m, n . Portanto, $f(a_k x) = f(a_k) + f(x)$ para todo k e para cada $x \in \{m, n\}$.

Agora, considere o intervalo $I_k = [a_k m, a_k n)$ e seja k_0 qualquer natural maior que $(m^2 n + m - n)/[mn(n - m)]$ (por exemplo, $k_0 = 1 + (m^2 n + m - n)/[mn(n - m)]$). O “mistério” na escolha de k_0 se resolve analisando a condição para que os intervalos I_k e I_{k+1} se *entrelacem*, isto é, para que tenhamos $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$; como (a_k) é crescente, a última relação significa que $a_{k+1} m < a_k n$. Mas

$$\begin{aligned} a_{k+1} m < a_k n &\iff [mn(k+1) + 1]m < (mnk + 1)n \\ &\iff \frac{m^2 n + m - n}{mn(n - m)} < k. \end{aligned}$$

Assim, com a escolha de k_0 , vale

$$a_{k+1} m < a_k n, \quad \forall k \geq k_0. \quad (5)$$

Afirmamos que

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k = [a_{k_0} m, +\infty). \quad (6)$$

Realmente, por um lado, como $a_k m \geq a_{k_0} m$ para todo $k \geq k_0$, valem as inclusões $I_k \subset [a_{k_0} m, +\infty)$ para tais k e, portanto,

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k \subset [a_{k_0} m, +\infty).$$

Por outro lado, dado um número real $r \in [a_{k_0}m, +\infty)$, existe um menor natural $K \geq k_0$ satisfazendo $r < a_K n$. (Por que?) Se $K = k_0$, então $r \in I_{k_0}$. Caso seja $K > k_0$, a definição de K permite obter a desigualdade $a_{K-1}n \leq r$, o que, por (5), implica $a_K m < r$, de forma que $r \in I_K$. Em qualquer caso, $r \in \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k$, estabelecendo a segunda inclusão,

$$[a_{k_0}m, +\infty) \subset \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k.$$

Com a afirmação justificada, a hipótese garante que há algum ponto de estrangulamento m_0 de f em $[a_{k_0}m, +\infty)$, de modo que, por (6), $a_k m \leq m_0 < a_k n$ para algum $k \geq k_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(a_k) + f(m) &= f(a_k m) \\ &\leq f(m_0) \\ &< f(a_k n) = f(a_k) + f(n), \end{aligned}$$

de onde segue que $f(m) < f(n)$. □

Para o próximo resultado, considere o seguinte fato: *dados em um plano uma reta r e pontos A, B de um mesmo lado de r , dentre todos os pontos $P \in r$ há um único ponto P_0 minimizando a soma*

$$\overline{AP} + \overline{PB}. \tag{7}$$

Tal ponto $P_0 \in r$ é caracterizado pela condição de que a bissetriz do ângulo AP_0B é perpendicular à reta r .

Esse enunciado é conhecido na literatura como *problema de Herão*. Para uma demonstração, confira o exemplo 10 e a observação 11 da aula *Transformações Lineares no $\mathbb{R}^2$ - Parte II*, no módulo *Geometria das Transformações Lineares* ou, ainda, o exemplo 2.32 da referência [3].

Para o caso particular em que o segmento AB é paralelo à reta r , o ponto P_0 em questão deve ser tal que a bissetriz relativa ao lado AB do triângulo AP_0B também é altura, o que equivale a dizer que AP_0B é isósceles de base AB . Com isso, obtemos a

Proposição 7. *Dados um segmento AB , uma reta r paralela a AB e um ponto genérico $P \in r$, o valor mínimo da soma (7) é assumido apenas no ponto $P_0 \in r$ tal que AP_0B é isósceles de base AB .* $\square$

Agora, recordemos a *desigualdade triangular*: dados três pontos A , B e C no espaço, vale

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}, \quad (8)$$

com igualdade se, e só se, C pertence ao segmento de reta AB . Utilizaremos essa importante desigualdade geométrica na solução do próximo

Exemplo 8. *Dados no espaço um quadrilátero convexo $ABCD$ e um ponto P , mostre que a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínima quando, e apenas quando, $P = O$, sendo O o ponto de encontro das diagonais de $ABCD$.*

Solução. Por (8), temos

$$\overline{AC} \leq \overline{PA} + \overline{PC} \text{ e } \overline{BD} \leq \overline{PB} + \overline{PD}. \quad (9)$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$\overline{AC} + \overline{BD} \leq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}. \quad (10)$$

A igualdade em (10) acontece se, e só se, as desigualdades em (9) forem igualdades. Como sabemos, isso ocorre se, e somente se, P pertence a ambos os segmentos AC e BD , isto é, se, e só se, P for o ponto de encontro O das diagonais AC e BD . Sendo

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD},$$

podemos afirmar que

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \leq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD},$$

com igualdade se, e só se, $P = O$. A solução está, pois, encerrada. $\square$

Exemplo 9. *Seja $AECFGBHD$ um cubo de bases $AECF$, $GBHD$ e arestas laterais AG , EB , CH e FD . Prove que a soma das distâncias dos pontos A , B , C e D ao centro O do cubo é menor que a soma das distâncias desses vértices a qualquer outro ponto no espaço.*

Solução. Dado um ponto P no espaço, diferente de O , devemos provar que

$$4R < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}, \quad (11)$$

sendo R a distância comum de O aos vértices do cubo.

Seja r a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos AC e BD . Observe que r é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Mais ainda, fixada uma base do cubo ($AECF$ ou $GBHD$), cada ponto de r equidista dos vértices dessa base.

Dividiremos nossa análise em dois casos:

1º caso. $P \in r$.

Aplicando o exemplo anterior ao retângulo $ACHG$, cujo centro é O , obtemos

$$\begin{aligned} 4R &= \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OH} + \overline{OG} \\ &< \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PH} + \overline{PG} \\ &= \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PD}. \end{aligned}$$

2º caso. $P \notin r$.

Se P' for a projeção ortogonal de P sobre a reta r , afirmamos que

$$\overline{P'A} + \overline{P'C} < \overline{PA} + \overline{PC}. \quad (12)$$

Com efeito, sejam α o plano determinado pelo par de retas $(r, \overleftrightarrow{AC})$ e P'' a projeção ortogonal de P em α . Note que, para cada ponto $Q \in \alpha$, vale $\overline{P''Q} \leq \overline{PQ}$, com igualdade se, e só se, $P \in \alpha$. Por um lado, é claro que a igualdade se verifica para $P \in \alpha$, caso em que $P'' = P$. Por outro lado, se $P \notin \alpha$, então, com Q como acima, o triângulo $QP''P$ deve ser retângulo em P'' e a desigualdade estrita $\overline{P''Q} < \overline{PQ}$ segue

do fato de que a medida da hipotenusa $\overline{PQ}$ é maior que a medida do cateto $\overline{P''Q}$.

Como $A, C \in \alpha$, a discussão do parágrafo anterior permite escrever as relações

$$\overline{P''A} \leq \overline{PA}, \quad \overline{P''C} \leq \overline{PC},$$

o que dá

$$\overline{P''A} + \overline{P''C} \leq \overline{PA} + \overline{PC}, \quad (13)$$

valendo a desigualdade estrita caso $P \notin \alpha$. Aliás, é isso que deve ocorrer se tivermos $P'' = P'$, já que $P \in \alpha$ e $P'' = P'$ implicam $P = P'' = P' \in r$, contradizendo a hipótese. Assim, (12) está estabelecida se $P'' = P'$.

Suponha, portanto, $P'' \neq P'$. Como a reta $s := \overleftrightarrow{P'P''}$ está contida em α , o teorema das três perpendiculares³

$$\overline{P'A} + \overline{P'C} < \overline{P''A} + \overline{P''C}, \quad (14)$$

o que acarreta (12), por (13).

De forma completamente análoga, prova-se que

$$\overline{P'B} + \overline{P'D} < \overline{PB} + \overline{PD}. \quad (15)$$

Assim, a adição das desigualdades (12) e (15) fornece

$$\overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}. \quad (16)$$

Pelo 1º caso aplicado ao ponto P' , segue que

$$\begin{aligned} 4R &\leq \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D} \\ &< \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}, \end{aligned}$$

encerrando o 2º caso, estabelecendo (11) e concluindo a solução. $\square$

Dicas para o Professor

³Vide proposição 7.10 da referência [1].

O material dessa aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

O uso de funções quadráticas na busca de extremos de funções, como no Exemplo 3, pode ser explorado mais a fundo (veja os exercícios resolvidos nas vídeo-aulas e a seção 1.2 da referência [4]). Aliás, o Exemplo 3 é uma versão de um problema geométrico famoso, chamado **problema isoperimétrico**: *dentre todas as curvas simples fechadas no plano, a que delimita a região com maior área é o círculo.*⁴

Conexões entre desigualdades e problemas geométricos bastante interessantes, inclusive o problema isoperimétrico, são exploradas nas sugestões de leitura complementar [3] e [5].

O último exemplo é uma adaptação do problema 3 da edição de 1966 da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO): *“Prove que a soma das distâncias dos vértices de um tetraedro regular ao centro de sua esfera circunscrita é menor que a soma das distâncias desses vértices a qualquer outro ponto no espaço.”* A versão original segue do exemplo 9, se notarmos que todo tetraedro regular pode ser inscrito em um cubo, no sentido de que os vértices do tetraedro estão entre os vértices do cubo e não há três vértices do tetraedro em uma mesma face do cubo⁵.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*, segunda edição. Coleção Profmat, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, volume 1: Números Reais, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2024.

⁴Uma curva é dita simples quando não tem auto interseções e é dita fechada se um ponto que a percorre, deixando seu interior sempre à esquerda, retorna eventualmente à posição inicial.

⁵Mais geralmente, todo tetraedro pode ser inscrito em um único *paralelepípedo*. Qualquer par de arestas reversas do tetraedro determina um único par de faces paralelas do paralelepípedo circunscrito pela condição de que tais arestas sejam diagonais dessas faces.

3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, volume 2: Geometria Euclidiana Plana, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2024.
4. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, volume 3: Introdução à Análise, terceira edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.
5. N. D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*. New Mathematical Library, Random House, 1961.

Portal OBMEP