Material Teórico - Módulo de UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E DE ÁREAS

Conversões de Unidades de Medida de Área e Exercícios Avançados

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Maio de 2021

Portal OBMEP

Portal da Matemática
OBMEP

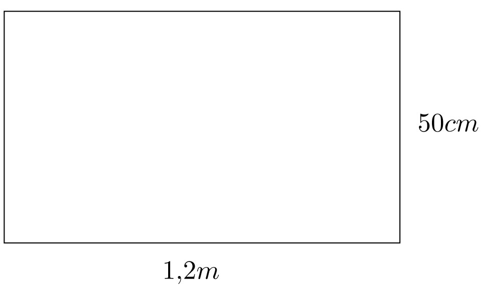
1 Introdução

Este material tem dois objetivos principais: explorar a maneira na qual convertemos uma medida de área em outra; resolver exercícios desafiadores sobre áreas.

2 Conversões de unidades de área

Vamos iniciar a aula com alguns exercícios simples, que nos ajudarão a compreender o mecanismo de conversão de unidades de área.

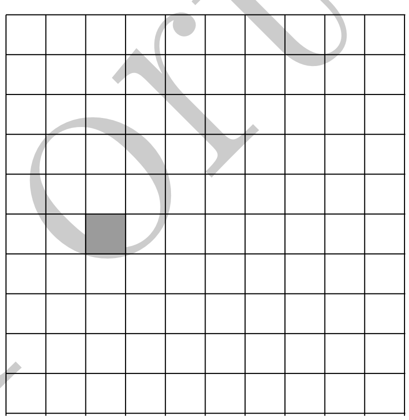
Exercício 1. *Calcule a área do retângulo a seguir.*



Um aluno desatento pode fazer o cálculo $1,2 \times 50 = 60$, pois aprendeu que a área de um retângulo é obtida pelo produto do seu comprimento por sua altura. Apesar de verdadeiro, esse fato só é válido quando as dimensões do retângulo vêm dadas em uma mesma unidade de medida, o que não é o caso na presente situação.

A fim de remediar o problema, observe que, como $1m$ é equivalente a $100cm$, temos que 1,2m é equivalente a a $1,2 \times 100 = 120cm$. Assim, ao calcularmos a área do retângulo, obtêm-se $120cm \times 50cm = 6000cm^2$. Isso significa que a área desse retângulo é equivalente à soma das áreas de 6000 quadradinhos de lado $1cm$.

Exercício 2. *Quantos quadradinhos de lado $1mm$ são necessários para cobrir um quadrado de lado $1cm$?*



Solução. Uma vez que $1cm$ é o mesmo que $10mm$, podemos particionar um quadrado de lado $1cm$ em $10 \times 10 =$ 100 quadradinhos de lado $1mm$, utilizando nove retas verticais e nove retas horizontais, conforme mostrado na figura anterior (cada um dos conjuntos de 9 retas particiona o quadrado em 10 faixas). □

Em relação a conversões de unidades, o exercício anterior garante que $1cm^2$ corresponde a $100mm^2$.

De modo geral, se ud e vd são unidades de comprimento satisfazendo a $ud = k\ vd$, então $ud^2 = k^2\ vd^2$. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 3. *Um quilômetro é equivalente a* 1000 *metros. Portanto,*

$$1km^2 = 1.000^2 m^2 = 1.000.000 m^2.$$

Em palavras, um quilômetro quadrado é equivalente a um milhão de metros quadrados.

Exemplo 4. *Uma unidade de comprimento muito comum no sistema Inglês de unidades é a milha (mi), que corresponde a* 1,60934 *quilômetros. Portanto,*

$$1mi^2 = (1{,}60934)^2 km^2 \cong 2{,}59 km^2.$$

Em palavras, uma milha quadrada é equivalente aproximadamente a 2,59 *quilômetros quadrados.*

3 Exercícios avançados

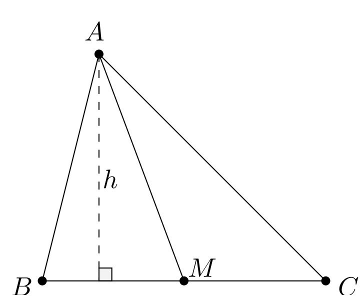
Para resolver os exercícios desta seção empregaremos, além do conteúdo apresentado nas aulas anteriores, três novas ideias que serão apresentadas a seguir.

3.1 Áreas e medianas

As medianas de um triângulo são os segmentos que ligam cada vértice ao ponto médio do lado oposto. Dessa forma, um triângulo possui três medianas, uma para cada vértice (a próxima figura mostra uma delas, o segmento AM).

Quando traçamos uma mediana, dividimos um triângulo em duas partes de mesma área. Essa propriedade é consequência direta do cálculo da área de triângulo através da altura e da base, conforme ensina o seguinte

Lema 5. *Se ABC é um triângulo e M é o ponto médio do lado BC, então as áreas dos triângulos ABM e AMC são iguais.*



Portal OBMEP

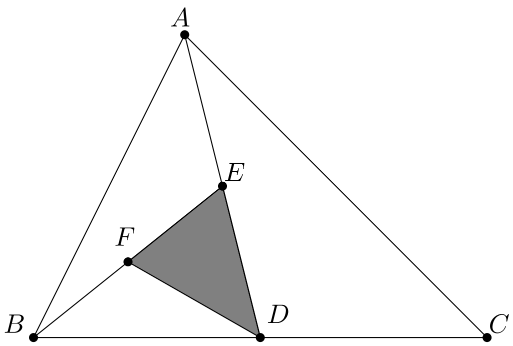
Prova. Note que, em relação às bases BM e CM, os dois triângulos têm a mesma altura, cujo comprimento denotamos por h (observe novamente a figura). Também, as medidas das bases são iguais, M é o ponto médio de BC. Assim, utilizando a fórmula de área para triângulos, obtemos

$$[ABM] = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot h = [AMC].$$

$\square$

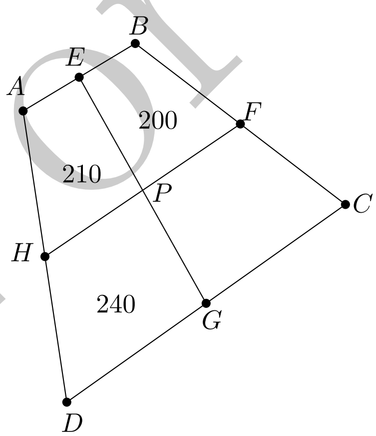
Agora, utilizaremos esse lema para resolver os próximos exercícios.

Exercício 6. *Na figura a seguir, ABC é um triângulo de área 72 e D, E e F são os pontos médios dos segmentos BC, AD e BE, respectivamente. Calcule a medida da área do triângulo DEF.*



Solução. Pelo lema anterior, o segmento AD divide o triângulo ABC em duas partes de mesma área, pois D é o ponto médio de BC. Assim, $[ABD] = 36$. Da mesma forma, BE divide o triângulo ABD em duas partes de mesma área; logo, $[BED] = 18$. Aplicando esse raciocínio mais uma vez, agora ao triângulo BDE, concluímos que $[DEF] = 9$. $\square$

Exercício 7. *Na figura a seguir, E, F, G e H são os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$. Calcule a área do quadrilátero $CFPG$.*



Solução. Como E é o ponto médio de AB, o lema garante que PE divide o triângulo PAB em duas partes de mesma área, que denotaremos por x. Assim, $[PEA] = [PEB] = x$. Aplicando a mesma ideia aos triângulos PBC, PCD e PDH, podemos escrever $[PBF] = [PFC] = y$, $[PCG] = [PGD] = z$ e $[PDH] = [PHA] = w$.

A figura do enunciado garante que

$$x + w = 210, \quad y + x = 200 \quad \text{e} \quad w + z = 240.$$

Por outro lado, queremos descobrir o valor de $y + z$.

Somando a duas últimas equações, obtemos

$$x + y + z + w = 200 + 240 = 440.$$

Como $x + w = 210$, concluímos que

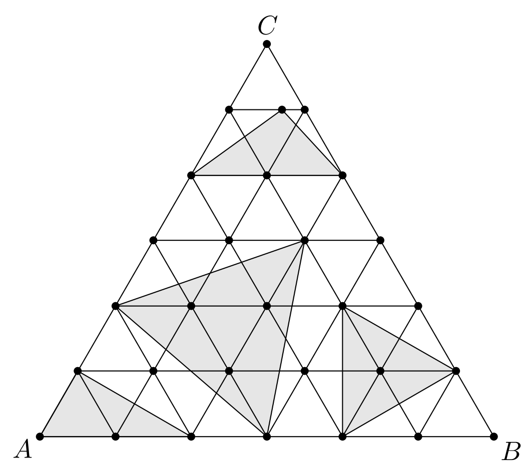
$$\begin{aligned} y + z &= (x + y + z + w) - (x + w) \\ &= 440 - 210 = 230. \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Malhas não quadriculadas

Em aulas anteriores, aprendemos que utilizar malhas quadriculadas pode ser útil para resolver alguns problemas sobre áreas. Agora, mostraremos que essa ideia pode ser estendida para outros tipos de malhas do plano.

Exercício 8 (OBMEP 2016). *O triângulo equilátero ABC da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos sombreados?*

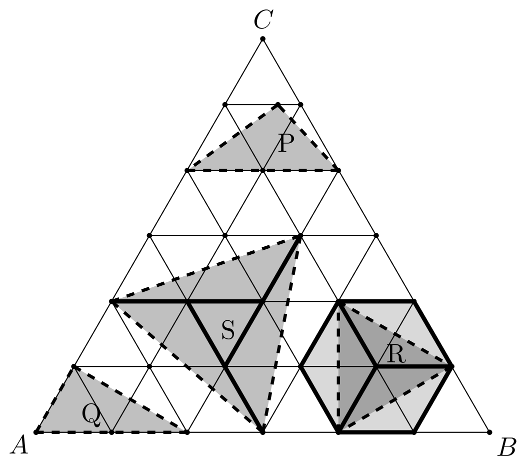


Solução. Nomeemos as quatro regiões triangulares tracejadas pelas letras P, Q, R e S, conforme indicado na próxima figura. Observe que P e Q possuem a mesma área, já que as duas regiões são triângulos com as mesmas medidas de base e altura.

Mais precisamente, as áreas dessas regiões medem $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, pois Q é a metade do paralelogramo formado pelos quatro primeiros triângulos menores da linha de baixo,

Portal OBMEP

contados da esquerda para a direita (e cada um desses triângulos menores têm área 1).



Por outro lado, a região R é a parte central de um hexágono (destacado em negrito) formado por seis triângulos menores. Por sua vez, tal hexágono por sua vez compreendido como a união dos três losangos de área 2 também destacados. Como o triângulo R é composto pelas metades desses três losangos, logo, R possui área $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Por fim, perceba que a região S pode ser dividida em quatro regiões, um triângulo menor no centro, e três triângulos iguais em seu entorno, como indicado em negrito na figura. O triângulo central tem área 1 e os outros têm área 2, pois são metades de paralelogramos formados por quatro triângulos menores. Assim, a área da região S é $1 + 3 \times 2 = 7$.

Consequentemente, a área total destacada é igual a $2 \times 2 + 3 + 7 = 14$. □

3.3 Exercícios de demonstração

A Geometria Plana foi a primeira área da Matemática a ser *organizada de forma axiomática*; isso já no século III a. C., no célebre livro "Elementos", escrito pelo matemático grego Euclides de Alexandria.

Organizar de forma axiomática significa fazer uma clara separação entre os *axiomas* que formam a Geometria Euclidiana (isto é, aqueles resultados que assumimos como verdadeiros sem necessidade de justificativa) e os resultados derivados a partir desses axiomas (ou de outros fatos anteriormente derivados a partir deles) empregando-se a *Lógica Dedutiva*.

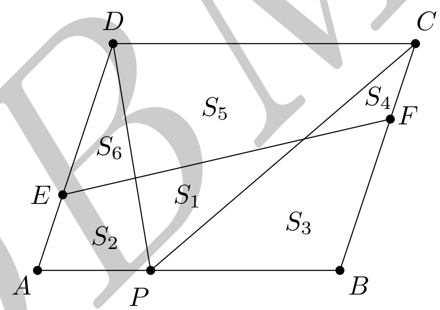
Esse *processo de dedução de uma nova verdade a partir de um conjunto de fatos já sabidamente verdadeiros* (quer sejam eles axiomas ou outros fatos anteriormente deduzidos a partir dos axiomas) é conhecido em Matemática como uma **demonstração**.

Os próximos exercícios pedem que alguns resultados geométricos sejam demonstrados. Para tanto, podemos utilizar somente os fatos geométricos apresentados em aulas anteriores desse módulo. Ao lê-los, você deve esforçar-se por identificar exatamente onde utilizaremos fatos já conhecidos, e como o recurso a tais fatos permite avançar na direção de estabelecer a validade do que se pede.

Exercício 9. *Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo, $AE = CF$ e os S_i denotam as áreas dos polígonos aos quais pertencem. Se P é um ponto qualquer sobre o lado AB, mostre que:*

(a) $S_1 = S_4 + S_6$.

(b) $S_5 = S_2 + S_3$.



Solução. Como $AE = CF$, os trapézios $DCFE$ e $AEBF$ são congruentes; portanto, possuem uma mesma área. Dessa forma,

$$S_5 + S_4 + S_6 = S_1 + S_2 + S_3. \qquad (1)$$

Por outro lado, o paralelogramo $ABCD$ e o triângulo PCD têm a mesma base (DC) e a mesma altura (no triângulo PCD, a altura relativa ao vértice P). Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é o dobro da área do triângulo PDC:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 2(S_1 + S_5).$$

Simplificando essa igualdade, ficamos com

$$S_2 + S_3 + S_4 + S_6 = S_1 + S_5. \qquad (2)$$

Somando S_1 do dois lados de (1), obtemos

$$S_1 + S_5 + S_4 + S_6 = 2S_1 + S_2 + S_3.$$

Substituindo $S_1 + S_5$ pelo primeiro membro de (2), ficamos com

$$(S_2 + S_6 + S_3 + S_4) + S_4 + S_6 = 2S_1 + S_2 + S_3.$$

Cancelando as parcelas S_3 e S_4, chegamos à igualdade

$$2(S_4 + S_6) = 2S_1,$$

Portal OBMEP

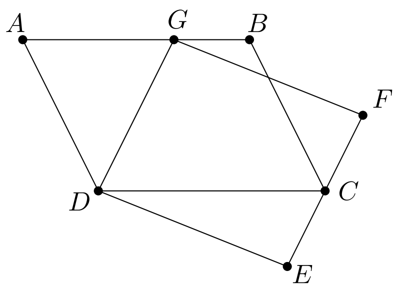
que é equivalente ao item (a).

Por fim, substituindo $S_4 + S_6$ por S_1 em (1), obtendo

$$S_5 + S_1 = S_1 + S_2 + S_3.$$

Então, cancelando S_1, obtemos (b). $\square$

Exercício 10. *Na figura abaixo, $ABCD$ e $DEFG$ são paralelogramos. Além disso, C está sobre EF e G está sobre AB. Prove que ambos os paralelogramos têm a mesma área.*



Solução. Note que o paralelogramo $ABCD$ e o triângulo CDG têm CD como base comum e alturas iguais relativas a ela. Logo,

$$[ABCD] = 2[CDG].$$

Por outro lado, o paralelogramo $DEFG$ e o triângulo GDC têm DG como base comum e alturas iguais relativas a ela. Logo,

$$[DEFG] = 2[CDG].$$

Para terminar, observando que as áreas dos dois paralelogramos são iguais ao dobro da área de um mesmo triângulo, concluímos que elas devem ser iguais. $\square$

4 Sugestões aos professores

Ao ensinar conversões de unidades de áreas, é importante também apresentar exemplos de conversões nas quais as medidas de comprimento originais não sejam potências de dez uma da outra, como foi o caso do Exemplo 4. Além de apresentar o conceito em um sentido mais amplo, esta será uma excelente oportunidade de revisar o algoritmo da multiplicação para números decimais.

Ao explorar a noção de malha triangulada, o professore pode utilizar o GeoGebra. Nesse aplicativo, é possível trocar a malha quadriculada padrão por outros tipos, incluindo a malha triangulada.

Em sala de aula, o professor pode trabalhar com os exercícios de demonstração da seguinte forma: separe os alunos em grupos e solicite que pensem e analisem as situações apresentadas no enunciado. Em seguida, lhes entregue uma folha com as demonstrações e os estimule a tentar entendê-las por conta própria. Por fim, o professor deve identificar quais alunos compreenderam as demonstrações e solicitar que eles as exponham ao restante da turma, na lousa. Ao fim da dinâmica, o professor deve estar atento para retirar as dúvidas que ainda permanecerem.

As referências a seguir trazem muito mais sobre Geometria Plana, sendo [1] mais elementar que [2].

5 Bibliografia

[1] Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 2: Primeiros Passos em Geometria.* Rio de Janeiro, IMPA, 2020.

[2] Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro, SBM, 2013.*

Portal OBMEP