

Material Teórico - Módulo de Potenciação

Potências com Expoente Inteiro – Parte 1

Oitavo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

4 de setembro de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Imagine que você tem em mãos uma folha de papel comum. Ela é muito fina, tendo cerca de 0,1 mm de espessura. Se você dobrar essa folha exatamente ao meio, ela passará a ter duas camadas, ficando com o dobro da espessura (ou seja, 0,2 mm). Dobrando ao meio mais uma vez, teremos 4 camadas. Mais uma vez, 8 camadas, depois 16 camadas, e assim por diante.

Agora, imagine a seguinte situação: e se você fosse capaz de dobrar essa mesma folha de papel pela metade **42 vezes seguidas**? Quantas camadas de papel teríamos ao terminar as dobraduras?

Para descobrir a resposta, precisaríamos multiplicar o número 2 por ele mesmo 42 vezes:

$$\text{Total de camadas} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{42 \text{ fatores}}.$$

Já imaginou ter que escrever essa operação no caderno? Seria cansativo, ocuparia bastante espaço e a chance de você esquecer algum fator 2 no meio do caminho, ou errar algum cálculo, seria enorme. Em situações reais em Astronomia ou Física as coisas ficam ainda piores, com números sendo multiplicados centenas de vezes.

Foi exatamente para simplificar o nosso trabalho e evitar escrever multiplicações com um número enorme de fatores que os matemáticos criaram uma **nova notação**. A multiplicação sucessiva dos 42 fatores 2 que representamos acima pode ser representada sob a forma 2^{42} .

Nesta primeira parte do nosso estudo sobre potenciação, introduziremos o conceito de potência utilizando apenas expoentes inteiros positivos.

De modo geral, sejam a um número real (chamado de **base**) e n um número inteiro positivo (chamado de **expoente**). Definimos a potência a^n (lê-se " a elevado a n ") como o produto de n fatores iguais a a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Por exemplo, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Nesse caso, a base é 3 e o expoente é 4.

Observação 1. *Você faz ideia da espessura que essa folha teria após 42 dobras? Ao calcularmos o valor de 2^{42} , obtemos um número tão grande que, ao multiplicar pela espessura inicial de 0,1 mm, o bolo de papel alcançaria impressionantes 440 mil quilômetros de altura. Essa medida é maior do que a distância da Terra até a Lua!*

1 Propriedades das potências

Muitas vezes, calcular o valor de uma potência diretamente é trabalhoso ou até impossível manualmente. Para simplificar expressões, utilizamos as **propriedades das potências**. Em vez de apenas apresentar essas regras prontas, vamos resolver alguns exemplos simples e observar os padrões que surgem nas operações.

Multiplicação de potências de mesma base

Observe as seguintes multiplicações de potências de mesma base.

$$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5;$$

$$5^2 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6.$$

Note que, no primeiro caso, o expoente final 5 é exatamente a soma dos expoentes iniciais, $3 + 2$. No segundo, o expoente 6 é a soma dos expoentes iniciais, $2 + 4$. Os exemplos acima podem ser generalizados do seguinte modo:

Ao multiplicar potências que possuem a mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad (1)$$

Para o que faremos mais adiante, veja que a regra acima continua válida se multiplicarmos mais de duas potências de mesma base; por exemplo,

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n} \cdot a^p = a^{(m+n)+p} = a^{m+n+p}.$$

Divisão de potências de mesma base

Agora, vejamos o que acontece nas divisões abaixo ao cancelarmos os fatores comuns.

$$\frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4;$$

$$\frac{3^5}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^1.$$

Perceba que os novos expoentes são iguais às diferenças entre os expoentes de cima e de baixo ($6 - 2 = 4$ e $5 - 4 = 1$). Podemos generalizar essa situação do seguinte modo:

Ao dividir potências de mesma base (com $a \neq 0$), conservamos a base e subtraímos os expoentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (para } m > n\text{)}. \quad (2)$$

Potência de uma potência

O que ocorre ao elevarmos uma potência a um novo expoente? Os exemplos a seguir esclarecem a situação; veja que, em ambos, utilizamos a regra de somar os expoentes ao fazer o produto de potências de mesma base:

$$(7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^{3 \cdot 2} = 7^6;$$

$$(10^4)^2 = 10^4 \cdot 10^4 = 10^{4+4} = 10^{2 \cdot 4} = 10^8.$$

Em ambos os casos, a quantidade final de fatores multiplicados é o produto dos expoentes originais. Generalizando, obtemos a propriedade a seguir.

Ao elevar uma potência a um novo expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Potência de uma multiplicação

Por fim, para entender o comportamento da potenciação de um produto, ilustremos a situação geral por meio de dois exemplos:

$$\begin{aligned}(2 \cdot 3)^4 &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= 2^4 \cdot 3^4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5 \cdot x)^3 &= (5 \cdot x) \cdot (5 \cdot x) \cdot (5 \cdot x) \\ &= (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (x \cdot x \cdot x) \\ &= 5^3 \cdot x^3.\end{aligned}$$

Repare que, em ambos os casos, ao reordenarmos os fatores, o expoente foi distribuído para cada termo da multiplicação. Portanto, podemos generalizar a propriedade acima do seguinte modo:

A potência do produto de dois ou mais fatores é igual ao produto das potências desses fatores:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

2 Exemplos

Muitas vezes, as propriedades da notação de potenciação vistas acima são empregadas em problemas de maneira não

imediate, ou mesmo engenhosa. O objetivo dos exemplos que reunimos nesta seção é dar-lhe uma idéia sobre como isso pode ser feito.

Exemplo 2. *Qual é o algarismo das unidades do número 6^{2026} ? E do número 3^{2026} ?*

Solução. Para analisar o algarismo das unidades de grandes potências, procuramos por padrões de repetição (ciclos).

Para o número 6^{2026} : analisando as potências sucessivas de 6, notamos um padrão claro: $6^1 = 6$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$. Sabendo que o algarismo das unidades de um produto depende apenas da multiplicação dos algarismos das unidades de seus fatores, e como 6×6 dá como resultado um número terminado em 6, concluímos que o algarismo das unidades de 6^{2026} também é 6.

Para o número 3^{2026} , vamos listar os algarismos finais das primeiras potências de 3:

$$3^1 = 3 \text{ termina em } 3;$$

$$3^2 = 9 \text{ termina em } 9;$$

$$3^3 = 27 \text{ termina em } 7;$$

$$3^4 = 81 \text{ termina em } 1.$$

Nesse ponto, de $3^5 = 3^4 \cdot 3^1$, concluímos que, para encontrar o algarismo das unidades de 3^5 , multiplicamos o algarismo das unidades de 3^4 por 3, obtendo $1 \cdot 3 = 3$. Da mesma forma, de $3^6 = 3^5 \cdot 3^1$, vemos que, para encontrar o algarismo das unidades de 3^6 , multiplicamos por 3 o algarismo das unidades de 3^5 , obtendo $3 \cdot 3 = 9$.

Continuando dessa forma, segue facilmente que os algarismos das unidades das potências sucessivas de 3 formam uma sequência *cíclica* 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...

Para localizar nessa sequência o último algarismo de 3^{2026} , note que o último algarismo se repete de 4 em 4 termos, já que 4 é o tamanho do ciclo. Dividindo 2026 por 4, obtemos $2026 = 4 \times 506 + 2$. Como o resto é 2, o algarismo das unidades de 3^{2026} será o mesmo da segunda posição do ciclo (ou seja, de 3^2). Portanto, o algarismo das unidades de 3^{2026} é 9. $\square$

Exemplo 3. Calcule o valor da expressão numérica:

$$\frac{5^{2026} - 5^{2024}}{5^{2025} - 5^{2023}}.$$

Solução. Em somas e subtrações envolvendo potências muito grandes e próximas, uma técnica muito utilizada consiste em colocar a menor potência em evidência.

No numerador, a menor potência é 5^{2024} ; por outro lado, a regra de multiplicação de potências de mesma base nos permite escrever 5^{2026} como $5^{2024} \cdot 5^2$; assim,

$$\begin{aligned} 5^{2026} - 5^{2024} &= 5^{2024} \cdot 5^2 - 5^{2024} \\ &= 5^{2024} \cdot (5^2 - 1) \\ &= 5^{2024} \cdot 24. \end{aligned}$$

No denominador, a menor potência é 5^{2023} . Colocando-a em evidência, temos

$$5^{2025} - 5^{2023} = 5^{2023} \cdot (5^2 - 1) = 5^{2023} \cdot 24.$$

Substituindo na fração original as expressões obtidas acima, podemos escrever

$$\frac{5^{2026} - 5^{2024}}{5^{2025} - 5^{2023}} = \frac{5^{2024} \cdot 24}{5^{2023} \cdot 24} = \frac{5^{2024}}{5^{2023}}.$$

Por fim, utilizando a propriedade do quociente de potências de mesma base, concluímos que o último quociente acima é igual a $5^{2024-2023} = 5^1 = 5$. $\square$

Exemplo 4. Com quantos zeros termina o resultado da multiplicação $12^4 \cdot 15^5 \cdot 50^2$?

Solução. A quantidade de zeros no final de um número inteiro positivo depende de quantas vezes ele pode ser dividido por 10. Como $10 = 2 \cdot 5$, cada par de fatores 2 e 5 gera um zero final.

Para contar as quantidades de fatores 2 e 5, o primeiro passo é decompor as bases em fatores primos, utilizando as propriedades de potenciação que vimos anteriormente. Assim fazendo, obtemos:

- $12^4 = (2^2 \cdot 3)^4 = (2^2)^4 \cdot 3^4 = 2^8 \cdot 3^4$;
- $15^5 = (3 \cdot 5)^5 = 3^5 \cdot 5^5$;
- $50^2 = (2 \cdot 5^2)^2 = 2^2 \cdot (5^2)^2 = 2^2 \cdot 5^4$.

Agora, substituímos essas expressões no produto do enunciado e juntamos as bases iguais:

$$\begin{aligned} 12^4 \cdot 15^5 \cdot 50^2 &= (2^8 \cdot 3^4) \cdot (3^5 \cdot 5^5) \cdot (2^2 \cdot 5^4) \\ &= (2^8 \cdot 2^2) \cdot (3^4 \cdot 3^5) \cdot (5^5 \cdot 5^4) \\ &= 2^{10} \cdot 3^9 \cdot 5^9. \end{aligned}$$

Para formar fatores 10, precisamos agrupar os fatores 2 e 5. Temos disponíveis dez fatores iguais a 2 e nove fatores iguais a 5. Como quem limita a formação de pares é o fator que aparece a menor quantidade de vezes, conseguiremos formar exatamente 9 pares $2 \cdot 5$. Logo, o número termina em 9 zeros. $\square$

Exemplo 5. Se $3^{100} + 3^{99} + 3^{98} = K \cdot 3^{98}$, qual é o valor de K ?

Solução. A ideia é colocar o termo de menor expoente, 3^{98} , em evidência no lado esquerdo da equação. Assim, obtemos

$$3^{100} + 3^{99} + 3^{98} = 3^{98} \cdot 3^2 + 3^{98} \cdot 3^1 + 3^{98} \cdot 1.$$

Colocando o 3^{98} em evidência, chegamos a

$$3^{98} \cdot (3^2 + 3^1 + 1) = 3^{98} \cdot (9 + 3 + 1) = 3^{98} \cdot 13.$$

Por fim, igualando com a expressão dada no enunciado, ficamos com

$$3^{98} \cdot 13 = K \cdot 3^{98};$$

então, cancelando o fator 3^{98} , concluímos que $K = 13$. $\square$

O próximo exemplo diz respeito a uma equação na qual a incógnita se encontra no expoente de uma potência; por essa razão, dizemos que a equação é *exponencial*.

Exemplo 6. Resolva a equação exponencial $3 \cdot 3^{2x} = 9^x + 54$.

Solução. Para trabalhar com equações que envolvem potências, uma boa estratégia consiste em procurar bases em comum. Nesse sentido, observando que $9 = 3^2$ e aplicando a propriedade de potência de uma potência, podemos escrever $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$.

Substituindo 9^x por 3^{2x} na equação, ficamos com a equação equivalente $3 \cdot 3^{2x} = 3^{2x} + 54$ ou, o que é o mesmo,

$$3 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 54.$$

Agora,

$$3 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 54 \implies 2 \cdot 3^{2x} = 54 \implies 3^{2x} = 27.$$

Como $27 = 3^3$, segue que

$$3^{2x} = 3^3.$$

Uma vez que as bases são iguais e diferentes de 1, a única maneira das potências serem iguais é que seus expoentes também sejam iguais. Então,

$$2x = 3 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2}.$$

□

Observação 7. Ainda em relação ao exemplo anterior, veja que é realmente necessário observar que a base comum (3, no caso) é diferente de 1, pois toda potência 1^n é igual a 1; assim, $1^m = 1^n$ não implica $m = n$.

Exemplo 8. Simplifique a expressão algébrica $\frac{3^n \cdot 12^{n+2}}{4^{n+1} \cdot 9^n}$.

Solução. Inicialmente, vamos fatorar em números primos todas as bases de potências que ocorrem na expressão: temos $12 = 2^2 \cdot 3$, $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} 3^n \cdot 12^{n+2} &= 3^n \cdot (2^2 \cdot 3)^{n+2} \\ &= 3^n \cdot (2^2)^{n+2} \cdot 3^{n+2} \\ &= 3^n \cdot 2^{2n+4} \cdot 3^{n+2} \\ &= 2^{2n+4} \cdot 3^{2n+2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}4^{n+1} \cdot 9^n &= (2^2)^{n+1} \cdot (3^2)^n \\&= 2^{2n+2} \cdot 3^{2n}.\end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas acima na fração do enunciado e utilizando novamente as propriedades da potenciação, segue que

$$\begin{aligned}\frac{3^n \cdot 12^{n+2}}{4^{n+1} \cdot 9^n} &= \frac{2^{2n+4} \cdot 3^{2n+2}}{2^{2n+2} \cdot 3^{2n}} = \frac{2^{2n+4}}{2^{2n+2}} \cdot \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} \\&= 2^{(2n+4)-(2n+2)} \cdot 3^{(2n+2)-2n} \\&= 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36.\end{aligned}$$

□

Sugestões ao Professor

Duas sessões de 50 minutos são suficientes para apresentar todo o conteúdo deste material. Tendo em vista que o tema de potenciação é um dos pilares de toda a álgebra que virá nos anos seguintes (como equações exponenciais e funções exponenciais no Ensino Médio), sugerimos ao professor algumas estratégias pedagógicas adicionais:

- **A importância das justificativas:** é essencial não apenas despejar as propriedades de potenciação como um conjunto de regras a decorar. O momento em que os alunos observam que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ faz sentido lógico expandindo a multiplicação (como feito nos primeiros exemplos) solidifica a compreensão.
- **Fatoração evidenciada em somas e subtrações:** uma confusão constante dos alunos é tentar aplicar as propriedades (1) e (2) (que valem apenas para multiplicações e divisões) em somas de potências de mesma base, bem como errar dizendo que $2^3 + 2^4$ é algo como 4^7 ou 2^7 . Exercite pesadamente exemplos como os da aula, que utilizam o fator comum em evidência.

- **Ciclo de algoritmos:** a análise do algoritmo das unidades é um excelente ponto de partida para introduzir noções de aritmética modular de maneira orgânica e instigar o raciocínio investigativo dos alunos.

Portal OBMEP