Material Teórico - Módulo de NÚMEROS NATURAIS: REPRESENTAÇÃO E OPERAÇÕES BÁSICAS

Operações com números naturais - Parte 01

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de setembro de 2020

1 Introdução

No material anterior, aprendemos que o sistema de representação numérica que utilizamos é decimal e posicional. Além disso, as casas decimais são ordenadas da direita para a esquerda.

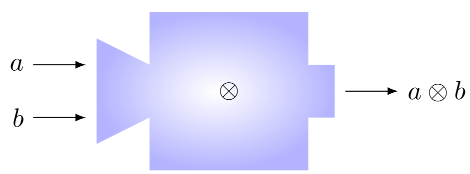
Assim, todo número pode ser presentado como soma de potências de 10, cada uma delas não se repetindo mais do que nove vezes.

Exemplo 1. *Considere o número* 341. *A representação decimal pode ser entendida através da seguinte igualdade:*

$$\begin{aligned} 341 &= 300 + 40 + 1 \\ &= 3 \times 100 + 4 \times 10 + 1 \\ &= (10^2 + 10^2 + 10^2) + (10^1 + 10^1 + 10^1 + 10^1) + (10^0) \end{aligned}$$

Nessa aula, aprenderemos como efetuar algumas das operações aritméticas com números naturais representados na notação decimal.

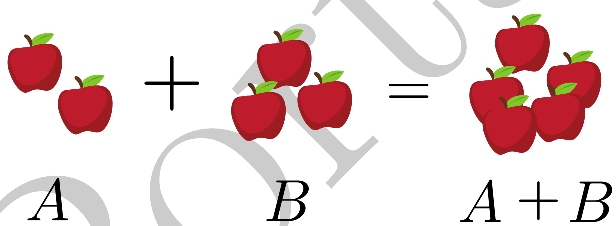
Podemos entender uma operação como uma "máquina"que recebe dois números e devolve um terceiro, chamado **resultado** (da operação).



2 Algoritmo da adição

A necessidade de adicionar números surgiu para representar situações nas quais grupos de objetos eram agregados. Considere o exemplo a seguir:

Exemplo 2. *Enzo e Valentina são irmãos que gostam de maçãs. Enzo tem* 2 *maçãs e Valentina tem* 3*. Portanto, os dois juntos possuem* 5 *maçãs.*



Observe que juntamos as quantidades de maçãs dos dois irmãos e, ao final, fizemos uma recontagem, o que nos deu como resultado 5 maçãs. Assim, representando a adição de 2 maçãs com 3 maçãs por $2 + 3$, concluímos que $2 + 3 = 5$.

Porém, quando as quantidades que serão agregadas é muito grande, o processo de recontagem torna-se exaustivo. Assim, precisamos de um método prático para adicionar quaisquer dois números. Esse método é conhecido como **algoritmo da adição**.

Observação 3. *Um algoritmo é uma sequência de procedimentos que devem ser realizados em uma ordem específica para alcançar determinado objetivo. Um exemplo de algoritmo é uma receita de bolo: os cozinheiros devem misturar os ingrediente na ordem e quantidades corretas e realizar procedimentos como bater, levar ao forno, etc., também em uma ordem e durações específicas, para realizar o objetivo de fazer um bolo.*

Algoritmo da adição

Para adicionar dois números, siga o algoritmo abaixo:

(1) Inicie na casa das unidades.

(2) Some os algarismos da casa em que está. Se a soma desses algarismos for maior que 9, acrescente o dígito das dezenas dessa soma à próxima casa.

(3) Se ainda existirem novas casas decimais à esquerda, avance para a próxima casa e repita o passo (2).

(4) Se não existirem novas casas, pare.

Exemplo 4. *Suponha que estamos procurando o* ***resultado*** *da adição* 374+285*. Vamos organizar os algarismos destes dois números em uma tabela para facilitar a explicação do algoritmo.*

C	D	U
3	7	4
2	8	5

Iniciando na casa das unidades, somamos os dígitos dos dois números e obtemos $4 + 5 = 9$*. Como essa soma tem apenas um único dígito, esse é o algarismo das unidades do* ***resultado****.*

	C	D	↓ U
	3	7	4
+	2	8	5
			9

Passamos, então, para a próxima casa decimal. A soma dos dígitos é $7 + 8 = 15$*. Como essa soma tem dois algarismos, o dígito das dezenas será acrescentado à próxima casa. O algarismo das unidades corresponde ao dígito das dezenas do* ***resultado****.*

	C	↓ D	U
	+1		
	3	7	4
+	2	8	5
		5	9

Como ainda há casas decimais, passamos para a próxima casa decimal e repetimos o processo. A soma dos dígitos é $3+2=5$. Ainda deve-se acrescentar o 1 que foi obtido no passo anterior. Assim, chegamos a $5+1=6$. Como essa soma tem um único algarismo, este corresponde ao dígito das centenas do ***resultado****.*

	↓		
	C	D	U
	+1		
	3	7	4
+	2	8	5
	6	5	9

Por fim, uma vez que não há outras casas decimais, paramos o algoritmo, obtendo

$$374+285=659.$$

Observação 5. *Em uma adição, o resultado é chamado de* **soma**. *Assim, não confunda a* adição *(que é uma operação) com a* soma*, que é o resultado de uma adição.*

Exemplo 6. *Suponha que estamos procurando o resultado da soma $893+25$. Note que o segundo número tem um dígito a menos do que o primeiro. Para aplicarmos o algoritmo, começamos acrescentando um zero à esquerda da representação decimal de 25, obtendo 025 (de forma que os dois números que estão sendo adicionados apareçam com uma mesma quantidade de algarismos). Agora, procedemos de forma análoga ao que foi feito no exemplo anterior.*

			↓
	C	D	U
	8	9	3
+	0	2	5
			8

Após somar os dígitos das unidades, passamos para a casa das dezenas. Como $9+2=11$ tem dois dígitos, o algarismo das dezenas é passado para a próxima casa:

		↓	
	C	D	U
	+1		
	8	9	3
+	0	2	5
		1	8

Somamos os algarismos das centenas, junto com o acréscimo de uma unidade obtida no passo anterior. Depois, não há outras casas decimais e o algoritmo pára.

	↓		
	C	D	U
	+1		
	8	9	3
+	0	2	5
	9	1	8

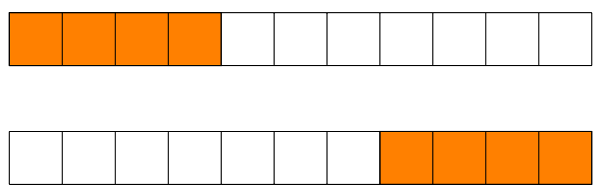
Observe que, a fim de empregar corretamente o algoritmo da adição, basta que saibamos apenas os resultados das adições de dois números de um algarismo cada. Tais resultados são exibidos na tabela a seguir:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

3 Propriedades da adição

Agora, apresentaremos duas propriedades que podem facilitar bastante os cálculos que envolvem adições.

Observando a figura abaixo, percebemos a igualdade entre as somas $4+7$ e $7+4$, pois ambas as expressões representam uma linha com 11 quadradinhos no total.



De fato, é imediato que um raciocínio análogo é verdadeiro para qualquer adição; assim, se invertermos a ordem das parcelas, o resultado não será alterado. Essa propriedade é chamada **comutatividade da adição**:

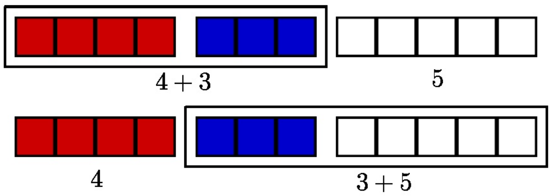
Comutatividade da adição

Se a e b são números naturais, então:

$$a+b=b+a.$$

A comutatividade também é evidente quando vamos ao mercado fazer compras: não importa se comprarmos um quilo de arroz por 5 reais e depois comprarmos um quilo de feijão por 6 reais ou fizermos o contrário. *O valor* *total da compra não muda com a ordem pela qual os itens passam na caixa registradora.*

Agora, observe a figura abaixo, na qual apresentamos os resultados para as adições $(4+3)+5$ e $4+(3+5)$ utilizando quadradinhos enfileirados.



Na linha de cima, primeiro fizemos a adição $4+3$ e, em seguida, adicionamos 5 ao resultado encontrado. Na de baixo, adicionamos 4 ao resultado da adição $3+5$. Em qualquer caso, como o total de quadradinhos é o mesmo nas duas linhas, a igualdade $(4+3)+5 = 4+(3+5)$ fica evidenciada.

Essa propriedade é chamada **associatividade da adição**:

Associatividade da adição

Se a, b e c são números naturais, então:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Uma consequência importante da associatividade da adição é que *podemos estender a operação de adição a mais de dois números, sem nos preocuparmos com a ordem em que os adicionamos dois a dois.* Por exemplo, podemos olhar $27+480+165$ tanto como $(27+480)+165$ quanto como $27+(480+165)$; o resultado será o mesmo.

O emprego das propriedades de associatividade e comutatividade da adição faz com que diversas operações de adição possam ser feitas (inclusive *mentalmente*!) com maior velocidade e menor chance de se cometer erros.

Por exemplo, para efetuar mentalmente a adição $46+37$, pode-se mentalizar os cálculos necessários da seguinte forma:

$$\begin{aligned}46+37 &= (40+6)+(30+7)\\ &= (40+30)+(6+7)\\ &= 70+13 = 83;\end{aligned}$$

Já com $28+34$, pode-se fazer assim:

$$\begin{aligned}28+34 &= 28+(30+4)\\ &= 28+(4+30)\\ &= (28+4)+30\\ &= 32+30 = 62.\end{aligned}$$

Apresentamos, a seguir, um exemplo mais elaborado do uso das propriedades da adição.

Exercício 7. *Calcule o resultado da adição:*

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9.$$

Solução. Conforme já mencionamos, as propriedades comutativa e associativa permitem que adicionemos os números em uma ordem diferente da que eles aparecem no enunciado. Sendo assim, podemos reorganizar a ordem das parcelas para obter:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+9 &= (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5\\ &= 10+10+10+10+5 = 45.\end{aligned}$$

□

Você pode estar se perguntando da utilidade do argumento acima, uma vez que as parcelas da soma $1+2+\ldots+9$ são poucas e pequenas, e, portanto, poderíamos calculá-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&1+2 = 3;\\ &1+2+3 = 3+3 = 6\\ &1+2+3+4 = 6+4 = 10\\ &\ldots\ldots\\ &1+2+\ldots+8 = 28+8 = 36\\ &1+2+\ldots+8+9 = 36+9 = 45.\end{aligned}$$

Para apreciar melhor a vantagem da solução que apresentamos para o exemplo anterior em relação à estratégia seguinte, tente aplicar cada uma delas para calcular $1+2+3+\ldots+98+99$ e veja qual é mais vantajosa.

4 A subtração

A subtração é a operação *inversa* da adição, no seguinte sentido: Ao adicionarmos um número b a um número a, obtemos $x = a+b$ como resultado. Subtraindo b desse resultado x, voltamos ao número original a. Em símbolos,

$$a+b = x \Rightarrow x-b = a.$$

Da mesma forma que x é a soma de a e b, dizemos que a é a **diferença** entre x e b.

Vejamos um exemplo numérico.

Exemplo 8. $11-4=7$, *pois* $7+4=11$. *Escrevendo como acima, temos que*

$$7+4 = 11 \Rightarrow 11-4 = 7.$$

Da mesma forma, $11-2=9$, *uma vez que* $9+2=11$*:*

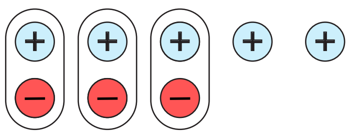
$$9+2 = 11 \Rightarrow 11-2 = 9.$$

Assim, podemos entender a operação de subtração como a busca por um valor incógnito de uma operação de adição. Vejamos mais um

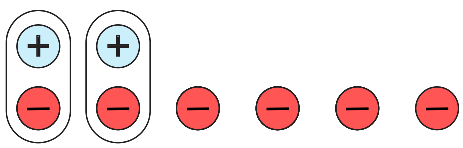
Exemplo 9. *A diferença* $8-5$ *é o número que adicionado a* 5 *dá* 8 *como resultado.*

$$8-5=\boxed{?}\Rightarrow\boxed{?}+5=8$$

Uma maneira de representar visualmente a operação de subtração é através de "bolas positivas" e "bolas negativas" na qual cada bola negativa anula uma bola positiva. Por exemplo, a operação $5-3=2$ pode ser visualizada como:



Da mesma forma, se você já conhece números negativos, a operação $2-6=-4$ pode ser visualizada como:



Assim, para que a subtração de dois números naturais seja natural, o primeiro número deve ser maior do que o segundo.

Observação 10. *O matemático germânico Johannes Widmann (*1460-1498*), no ano de* 1489*, publicou Aritmética Mercantil, o livro mais antigo em que os sinais* $+$ *e* $-$ *aparecem impressos.*

Porém, diferentemente do que ocorre com a adição, a subtração não é comutativa e nem é associativa. Considere os *contra-exemplos* a seguir:

$$7-5\neq 5-7.$$

$$(8-3)-1\neq 8-(3-1).$$

Por outro lado, tal como ocorre com a adição, há um algoritmo para subtrair números naturais escritos em sua representação decimal. Este algoritmo é apresentado a seguir:

Algoritmo da subtração

Para calcular a diferença entre dois naturais (o menor subtraído do maior), proceda como segue:

(1) Inicie na casa das unidades.

(2) Subtraia os algarismos da casa em que está.

(2.a) Se a subtração desses algarismos for menor do que 0, adicione 10 ao valor encontrado tornando-o positivo. Este novo valor será o algarismo do **resultado**. Quando isso ocorrer, deve-se retirar 1 do valor valor obtido pela subtração dos dígitos na próxima casa.

(2.b) Se a subtração desses algarismos for maior que ou igual a 0, este novo valor será o algarismo do **resultado**.

(3) Se ainda existirem novas casas decimais à esquerda, avance para a próxima casa e repita o passo (2).

(4) Se não existirem novas casas à esquerda, pare.

Exemplo 11. *Considere a subtração* $548-273$*. Iniciando na casa das unidades, subtraímos os dígitos dessa casa, obtendo* $8-3=5$*. Como essa subtração não é negativa, o valor obtido é o algarismo das unidades do* ***resultado****.*

	C	D	↓ U
	5	4	8
$-$	2	7	3
			5

Passamos, então, para a próxima casa decimal. A subtração dos dígitos é $4-7<0$*. Como esse valor é negativo, acrescentamos* 10 *nessa casa e subtraímos* 1 *da próxima casa. Agora, veja que* $10+4-7=7$*, que é não negativo. Este valor corresponde ao dígito das dezenas do* ***resultado****.*

	C	↓ D	U
	-1	$+10$	
	5	4	8
$-$	2	7	3
		7	5

Como ainda há casas decimais à esquerda, passamos para a próxima casa e repetimos o processo. A subtração dos dígitos é $5-2=3$*, mas ainda devemos subtrair* 1*, pois foi necessário um ajuste no passo anterior. Assim, chegamos a* $3-1=2$*, e, como esse valor é não-negativo, ele corresponde ao dígito das centenas do* ***resultado****.*

	↓ C	D	U
	-1	$+10$	
	5	4	8
$-$	2	7	3
	2	7	5

Por fim, uma vez que não há outras casas decimais, pa-

ramos o algoritmo, obtendo

$$548 - 273 = 275.$$

Finalizamos este material apresentando uma propriedade da subtração que pode ser utilizada para facilitar, em muito, a realização (mental ou não) de subtrações.

Subtração equivalente

Sejam a e b naturais. Então, para qualquer c natural, vale:

$$a - b = (a + c) - (b + c).$$

Exemplo 12. *Para calcular mentalmente* $174-96$*, podemos proceder como segue:*

$$\begin{aligned} 174 - 95 &= (174 + 5) - (95 + 5) \\ &= 174 - 90 = 84. \end{aligned}$$

(Observe que, no último passo, é muito simples aplicar o algoritmo da subtração mentalmente, pois $4 - 0 = 4$ *e* $17 - 9 = 8$*.)*

Os próximos dois exemplos ilustram como a subtração equivalente pode ser útil para o cálculo de diferenças nas quais um dos números é próximo de um número terminado em muitos zeros.

Exemplo 13. *Calcule* $179865 - 99997$.

Solução. Somando 3 aos dois termos da subtração, temos que

$$\begin{aligned} 179865 - 99997 &= (1798675 + 3) - (99997 + 3) \\ &= 179868 - 100000 \\ &= 79868. \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Calcule* $637863 - 59994$.

Solução. Somando 6 aos dois termos da subtração, temos que

$$\begin{aligned} 637863 - 59994 &= (637863 + 6) - (59994 + 6) \\ &= 637869 - 60000 \\ &= 577869. \end{aligned}$$

(Observe que, no último passo, aplicamos o algoritmo da subtração para calcular apenas $63 - 6 = 57$.) □

5 Sugestões aos professores

Separe dois encontros de 100 minutos cada para tratar sobre os assuntos apresentados neste material. No primeiro encontro, fale sobe a adição e, no segundo, sobre a subtração.

Ao tratar a adição, é importante o professor ressaltar a importância das propriedades comutativa e associativa para facilitar cálculos, inclusive mentais. Nesse sentido, um exercício que pode ser proposto é o seguinte: peça que os alunos calculem o resultado da expressão abaixo, inicialmente sem usar a comutatividade e a associatividade (efetuando os cálculos na ordem em que as operações aparecem), e depois usando as propriedades.

$$1070 + 93 - 70 + 7.$$

Outro exercício interessante é pedir que os alunos descrevam os passos dos algorítimos apenas com suas próprias palavras após a realização de alguns exemplos.

Utilize o trecho a seguir, retirado do livro *Alice através do Espelho*[1] para criar um debate em torno da situação apresentada. Experimente perguntar aos seus alunos: *Será que a Rainha Vermelha tem razão?*

"Boas maneiras não se ensinam em aulas", disse Alice. "Aulas ensinam a fazer contas de somar, e coisas desse tipo."

"E sabe Adição?" perguntou a Rainha Branca. "Quanto é um mais um mais um mais um mais um mais um mais um mais um mais um mais um?"

"Não sei", disse Alice. "Perdi a conta."

"Não sabe Adição", a Rainha Vermelha interrompeu.

Trecho de "Alice através do Espelho" por Lewis Carroll

[1] Charles Lutwidge Dodgson, matemático Inglês do século XIX, escrevia sob o pseudônimo de Lewis Carroll. Embora seja famoso somente como escritor infantil, Dodgson (ou Carroll...) também compôs trabalhos matemáticos de certa importância.