# Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

## Teorema do Valor Médio - Parte V

## Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

26 de Janeiro de 2026



Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, apresentamos uma variedade de resultados associados ao TVM ou que generalizam esse importante teorema. Dentre estes, destacamos o *TVM de Cauchy* (1) e a *Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange* (6).

# 1 Teoremas e exemplos

**Teorema 1** (TVM de Cauchy). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, deriváveis em $(a, b)$. Se $g'$ não se anula, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1}$$

**Prova.** Como $g'$ não se anula, o teorema de Darboux [1] garante que $g' > 0$ em $(a, b)$ ou $g' < 0$ em $(a, b)$; em qualquer caso, $g$ é estritamente monótona e, portanto, injetiva.

Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

As hipóteses sobre $f$ e $g$ garantem que $\phi$ é contínua, derivável em $(a, b)$, e um cálculo direto dá $\phi(a) = \phi(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$; portanto, o teorema de Rôlle garante a existência de $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Uma vez que

$$\phi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$$

e $g(b) - g(a) \neq 0, g'(c) \neq 0$, a relação (1) segue. □

**Exemplo 2.** *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 16 \\ 3^x + 3^y = 54 \end{cases}.$$

**Solução.** Observe que $(x, y) = (3, 3)$ é uma solução. Veremos que essa é, de fato, a única solução.

[1] Confira o Exemplo 3 da 4ª parte dessa aula.

Com efeito, se tivéssemos $2^x + 2^y = 16$ com $(x, y) \neq (3, 3)$, a monotonicidade da função exponencial $u \mapsto 2^u$ garantiria que $x < 3 < y$ ou $y < 3 < x$. Como ambas as equações do sistema são simétricas em $x$ e $y$, basta considerar o 1º caso.

A partir das relações $3^x + 3^y = 3^3 + 3^3$, $2^x + 2^y = 2^3 + 2^3$, poderíamos escrever

$$\frac{3^3 - 3^x}{2^3 - 2^x} = \frac{3^y - 3^3}{2^y - 2^3}. \tag{2}$$

Tencionamos empregar o teorema (1), para o quê convém considerar as funções exponenciais $f$ e $g$, de regras $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 2^x$. Aplicando o TVM de Cauchy às restrições dessas funções aos intervalos $[x, 3]$ e $[3, y]$, obteríamos constantes $c < 3 < d$ tais que

$$\frac{3^3 - 3^x}{2^3 - 2^x} = \frac{f(3) - f(x)}{g(3) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\ln 3 \cdot 3^c}{\ln 2 \cdot 2^c}$$

e

$$\frac{3^y - 3^3}{2^y - 2^3} = \frac{f(y) - f(3)}{g(y) - g(3)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{\ln 3 \cdot 3^d}{\ln 2 \cdot 2^d}.$$

Substituindo esses valores em (2), teríamos a igualdade

$$\left(\frac{3}{2}\right)^c = \left(\frac{3}{2}\right)^d,$$

o que implicaria $c = d$, uma contradição. $\square$

**Exemplo 3** (IMC - 2025). *Sejam $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ e $0 < a < b$ números reais tais que $f(a) = f(b) = k$. Prove que existe um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = k.$$

**Solução.** Defina $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x)/x$ e $h(x) = 1/x$. Como $g$ e $h$ são deriváveis e $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, o TVM de Cauchy fornece $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}. \tag{3}$$

A hipótese $f(a) = f(b) = k$ dá

$$\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = k;$$

como

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

a relação (3) fornece o resultado desejado. $\square$

Imitando o argumento da solução do exemplo anterior, prova-se o seguinte resultado, conhecido como *teorema do valor médio de Pompeiu* [2].

**Teorema 4.** [3] *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $0 \notin [a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).^4$$

Nosso próximo exemplo é devido ao matemático inglês Thomas M. Flett (1923 - 1976).

**Exemplo 5.** [5] *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(a) = f'(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c - a).^6 \tag{4}$$

[2] Em homenagem ao matemático romeno Dimitrie Pompeiu (1873 - 1954).

[3] Vide Teorema 3.1 de [1].

[4] Não é difícil verificar (faça isso!) que, geometricamente, essa igualdade significa que a secante ao gráfico de $f$ pelos pontos $(a, f(a)), (b, f(b))$, a tangente ao gráfico de $f$ em $(c, f(c))$ e o eixo das ordenadas são concorrentes.

[5] Vide Teorema 5.1 de [1].

[6] Essa igualdade tem a seguinte interpretação geométrica: *quando as tangentes nos extremos do gráfico de uma função (derivável) são paralelas, existe uma secante ao gráfico, passando pela sua extremidade esquerda, que tangencia esse gráfico em algum ponto interior. Uma vez mais, convidamos-lhe a checar a validade dessa afirmação.*

**Solução.** Defina a função auxiliar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pela regra

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \text{ se } x \in (a,b] \\ f'(a), \text{ se } x = a \end{cases}.$$

Da diferenciabilidade de $f$, segue a diferenciabilidade de $g$ em $(a,b]$. Por outro lado, sendo $\lim_{x\to a^+} g(x) = f'(a)$, é fácil concluir que $g$ é contínua.

Pela regra do quociente para a derivada, temos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)\cdot(x-a) - (f(x)-f(a))\cdot 1}{(x-a)^2} \\ &= \frac{f'(x)-g(x)}{x-a}, \end{aligned}$$

para cada $x \in (a,b]$. Em particular, a hipótese $f'(a) = f'(b)$ dá

$$g'(b) = \frac{f'(b)-g(b)}{b-a} = \frac{f'(a)-g(b)}{b-a} = -\frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Pelo TVM, existe $d \in (a,b)$ satisfazendo $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d)$, o que, pelo cálculo anterior, implica

$$g'(b) + g'(d) = 0. \tag{5}$$

`Afirmação`. Existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Com efeito, se for $g'(d) = 0$, basta tomar $c = d$. Caso contrário, a relação (5) garante que $g'(b)$ e $g'(d)$ possuem sinais contrários, de sorte que $g'(c) = 0$ para algum $c \in (d,b)$, pelo Teorema de Darboux.

Com a afirmação justificada, a expressão de $g'$ obtida acima garante que a igualdade $g'(c) = 0$ equivale a $f'(c) = g(c)$, o que, por sua vez, nada mais é que (4). $\square$

Para o próximo resultado, recorde que, dados um intervalo $I$ e um número natural $n$, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *de classe* $C^{n-1}$ se for $n-1$ vezes derivável em $I$, com $(n-1)$-ésima derivada $f^{(n-1)} : I \to \mathbb{R}$ contínua.

**Teorema 6** (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange). *Sejam $I$ um intervalo, $n$ um número natural e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^{n-1}$, $n$ vezes derivável no interior de $I$. Dados $a, b \in I$, com $a \neq b$, existe $c$ no intervalo aberto de extremos $a$ e $b$ satisfazendo*

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \tag{6}$$

*ou seja,*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \end{aligned}$$

**Prova.** Em tudo o que segue, denotamos por $J$ o intervalo aberto de extremos $a$ e $b$. Dividiremos a demonstração em casos.

`1º caso.` $f(a) = f(b) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$:

Temos de provar que $f^{(n)}(c) = 0$ para algum $c \in J$. Mas foi justamente isso que fizemos no Exemplo 6 [7] da 1ª parte dessa aula.

`2º caso.` $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$:

Aqui, precisamos garantir a existência de $c \in J$ tal que $f(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$. Se definirmos $g : I \to \mathbb{R}$ pela regra

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)}{(b-a)^n}(x-a)^n,$$

é tarefa simples verificar que $g(a) = g(b) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$, sendo $g$ de classe $C^{n-1}$ e $n$ vezes derivável no interior de $I$. (Note que as derivadas de ordem menor que $n$

[7] Embora tenhamos suposto $a < b$ na solução daquele exemplo, a situação em que $a > b$ pode ser tratada de forma completamente análoga.

da função polinomial $x \mapsto (x-a)^n$ se anulam em $a$.) Pelo 1º caso, existe $c \in J$ com $g^{(n)}(c) = 0$. Como

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \frac{n!f(b)}{(b-a)^n},$$

para cada $x$ no interior de $I$, a relação $g^{(n)}(c) = 0$ implica $f(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$.

`Caso geral`. Considere o polinômio $P$, de grau menor que ou igual a $n-1$, satisfazendo $P^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$, para cada $0 \leq i \leq n-1$. Como sabemos, [8]

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Definindo $g : I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - P(x)$, é evidente que $g$ é de classe $C^{n-1}$, é $n$ vezes derivável no interior de $I$ e tal que $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$. Portanto, pelo 2º caso, existe $c \in J$ tal que $g(b) = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$. Sendo $P$ um polinômio de grau menor que $n$, vale $P^{(n)} \equiv 0$, de forma que $g^{(n)} \equiv f^{(n)}$. Assim,

$$f(b) - P(b) = g(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n,$$

ou seja,

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

□

Antes de continuar, precisaremos do seguinte

**Lema 7.** *Para cada número real $x$, vale*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{7}$$

[8] Confira o Exemplo 13 da aula *Propriedades - Parte II*, no módulo *Derivada como Função.*

**Prova.** Fixado $x \in \mathbb{R}$, sejam $k$ um inteiro positivo tal que $|x| < k$ e $a := |x|/k$. Para cada natural $n > k$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|^n}{n!} \\ &= \frac{|x|^k}{k!} \cdot \frac{|x|}{k+1} \cdots \frac{|x|}{n} \\ &\leq \frac{|x|^k}{k!} \cdot \left(\frac{|x|}{k}\right)^{n-k} \\ &= M \cdot a^{n-k}, \end{aligned}$$

em que $M := |x|^k/k!$. Como $0 \leq a < 1$, temos $a^{n-k} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ [9], de forma que as estimativas acima garantem a validade da relação (7). $\square$

Recordemos também que, conforme comentado anteriormente [10], dada uma sequência $(a_i)_{i\geq 0}$ de números reais, escrevemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s \quad \text{ou} \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \cdots = s$$

para indicar que a sequência $(s_n)_{n\geq 0}$ das somas parciais, em que $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, converge para $s$. Assim, por definição, a igualdade $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = s.$$

**Exemplo 8.** *Prove que*

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

*para cada número real $x$. Em seguida, mostre que*

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

[9] Vide Exemplo 3.3 na referência [3].

[10] Confira a seção *Dicas para o Professor* da aula *Diferenciação Implícita - Parte II*, no módulo *Regra da Cadeia.*

*é um número irracional.*

**Prova.** Para a primeira parte, fixe $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e defina $s_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$, para cada inteiro $n \geq 0$. Precisamos provar que $\lim_{n\to\infty} s_n = e^x$, ou, equivalentemente, que

$$\lim_{n\to\infty} (e^x - s_n) = 0. \tag{8}$$

Pela fórmula de Taylor (6) aplicada a $f = \exp$, com $a = 0$, $b = x$ e $n$ substituído por $n+1$, deve existir $c$ no intervalo aberto de extremos 0 e $x$ tal que

$$e^x - s_n = \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Sendo $\exp^{(n+1)}(c) = e^c < e^{|x|}$, segue que

$$|e^x - s_n| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{9}$$

Para concluir, o lema 7 diz que $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que, por conta da desigualdade (9), implica a relação (8).

Quanto à irracionalidade de $e$, suponhamos, por contradição, que ele fosse racional, digamos, $e = \frac{m}{n}$, para certos inteiros positivos $m, n$. Então,

$$\begin{aligned} n!e = n! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} &= \sum_{i \leq n} \frac{n!}{i!} + \sum_{i > n} \frac{n!}{i!} \\ &= a + b, \end{aligned}$$

em que $a := \sum_{i \leq n} \frac{n!}{i!}$, $b := \sum_{i > n} \frac{n!}{i!}$.

Observe que, na soma que define $a$, cada parcela $n!/i!$ é um inteiro positivo (já que $i \leq n$), de modo que $a$ também é um inteiro positivo.

Afirmamos que $b$ é um número real positivo e menor que 1. De fato, é evidente que $b$ é positivo (pois $b > \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} > 0$). Por outro lado, observando que

$$\frac{n!}{i!} \leq \frac{1}{(n+1)^{i-n}}, \quad \forall\, i > n,$$

com desigualdade estrita se $i > n+1$, vem que

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{i-n}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} \leq 1. \end{aligned}$$

(Note que a penúltima igualdade se justifica a partir da fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita cujo primeiro termo e razão são iguais a $1/(n+1)$. [11])

Desse modo, as relações $n!e = a+b$ e $0 < b < 1$ implicam

$$a < n!e < a+1,$$

impedindo $n!e$ de ser inteiro, pois $a \in \mathbb{Z}$ e não há inteiro algum entre dois inteiros consecutivos. Por outro lado, como estamos supondo que $e = \frac{m}{n}$, temos que $n!e = m(n-1)!$ *é um inteiro*! Essa contradição mostra que $e$ não pode ser um número racional, ou seja, $e$ é irracional. $\square$

## Dicas para o Professor

A fórmula 6 permite aproximar $f$, em uma vizinhança dada $I_a$ do ponto $a$, por um polinômio de grau menor que ou igual a $n-1$, sendo o erro dessa aproximação controlado pela derivada de ordem $n$ de $f$ restrita a $I_a$. Exploramos essa propriedade, relativamente à função cosseno, nos exemplos 2 e 3 da aula *Exercícios - Parte III*, no módulo *Derivadas de Funções Trigonométricas*.

Perceba que o caso $n = 1$ na fórmula de Taylor com resto de Lagrange corresponde ao TVM. Outrossim, o TVM

[11] Recorde a Proposição 1 da aula *A Soma dos Termos de uma PG Infinita*, no módulo *Progressões Geométricas*.

também se torna um caso particular do TVM de Cauchy ao considerarmos $g = \text{Id}$.

Podemos interpretar cinematicamente o TVM de Cauchy da seguinte forma: se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumprirem as hipóteses desse teorema, a *curva* plana $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, possui, em um instante $c \in (a, b)$, vetor velocidade $\gamma'(c) := (f'(c), g'(c))$ *paralelo* ao vetor deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a) = (f(b) - f(a), g(b) - g(a))$.

Com efeito, se $c \in (a, b)$ satisfizer (1), consideramos o escalar $k := f'(c)/g'(c)$ e o vetor $v := (k, 1)$, obtendo $\gamma'(c) = g'(c) \cdot v$. Ademais, a relação (1) garante $\gamma(b) - \gamma(a) = (g(b) - g(a)) \cdot v$, de modo que os vetores $\gamma'(c)$ e $\gamma(b) - \gamma(a)$ são ambos paralelos ao vetor $v$.

A demonstração apresentada do TVM de Cauchy 1 é clássica (vide [4], [5] ou [6]) e consiste de uma adaptação da 2ª demonstração do Teorema do Valor Médio, conforme registramos na 3ª parte dessa aula. Há, contudo, uma prova natural que estabelece o TVM de Cauchy como um corolário do TVM (de Lagrange) e da regra da cadeia.

Realmente, definindo $\alpha := g(a), \beta := g(b)$, perceba que as hipóteses do teorema 1 garantem que $g$ é um homeomorfismo sobre $[\alpha, \beta]$ (podemos, sem perda de generalidade, supor $\alpha < \beta$), enquanto a restrição $g|_{(a,b)}$ é um difeomorfismo sobre $(\alpha, \beta)$. Daí, utilizando a regra da cadeia (para funções deriváveis e também para funções contínuas), não é difícil concluir que $\phi := f \circ g^{-1}$ cumpre as hipóteses do TVM. Portanto, existe $d \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \phi'(d)(\beta - \alpha). \tag{10}$$

Pondo $c := g^{-1}(d)$, teremos $c \in (a, b)$; sendo $\phi(\beta) = f(b)$, $\phi(\alpha) = f(a)$ e

$$\phi'(d) = f'(g^{-1}(d)) \cdot (g^{-1})'(d) = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

a relação (10) permite concluir (1), como desejado.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. P. K. Sahoo, T. Riedel. *Mean Value Theorems and Functional Equations*. Singapore: World Scientific, 1998.
2. R. Gelca e T. Andreescu. *Putnam and Beyond*, 2ª ed. Springer Nature, Cham, 2017.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 3. Introdução à Análise*. 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
4. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.
5. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.
6. M. Spivak. *Calculus*. 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.