Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Sistema de Unidade de Medida de Ângulos

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de março de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

1 Arcos e ângulos

Dado um círculo e dois pontos A e B sobre ele, um conjunto de pontos sobre o círculo que forma a curva que vai de um dos pontos ao outro é chamado de **arco**. Veja que dois pontos sobre o círculo determinam dois arcos: pensando sempre no sentido anti-horário,[1] temos um arco que vai de A até B e outro que vai de B até A. Quando o segmento AB é um diâmetro do círculo, AB é um *eixo de simetria* e, portanto, divide o círculo em dois pedaços congruentes (chamados *semicírculos*); neste caso, os dois arcos possuem o mesmo comprimento e temos o chamado arco de meia-volta. Mas, quando AB não é diâmetro, esses dois arcos possuem comprimentos diferentes, então um deles (o de maior comprimento) é o chamado **arco maior** e o outro (o de menor comprimento) é o **arco menor**.

Observação 1. *Quando os pontos A e B são coincidentes ($A \equiv B$), então o arco menor possui um único ponto (que coincide com os pontos A e B) e é chamado de **arco nulo**. E o arco maior é **arco de uma volta**.*

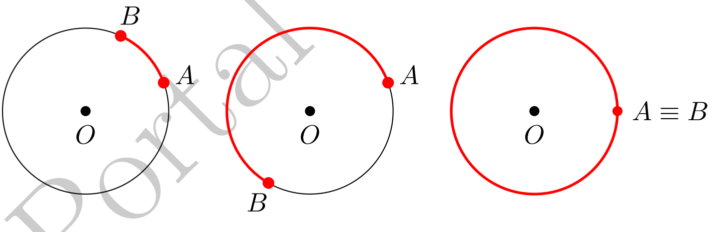
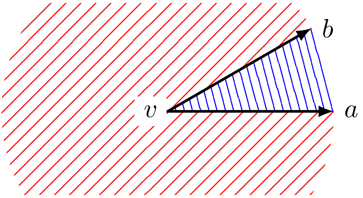


Figura 1: vários arcos de A para B (em vermelho), no sentido anti-horário.

Agora, vamos ver a definição de ângulo. Para formar um ângulo precisamos de duas semirretas de mesma origem, digamos $\overrightarrow{va}$ e $\overrightarrow{vb}$, com origem em v, como na figura abaixo.

[1] O sentido anti-horário é considerado o sentido natural, ou positivo, no estudo da trigonometria. A menos que seja dito explicitamente o contrário, os pontos de um arcos são informados no sentido anti-horário.



Estas semirretas dividem o plano em duas regiões (que na figura destacamos com cores diferentes) . Cada uma delas é um ângulo. Note que as regiões são infinitas (mas no papel só conseguimos pintar uma pedaço finito de cada). Todo ângulo possui um vértice, que na figura acima é o ponto v, e dois lados, as semirretas $\overrightarrow{va}$ e $\overrightarrow{vb}$. A região pintada de azul é chamada de região convexa. Isso porque para quaisquer dois pontos da região vale que o segmento de reta entre eles está inteiramente contida na região. A segunda região, pitada de vermelho é chamada de região não convexa (ou região côncava), pois é possível escolher dois pontos na região vermelha de forma que o segmento de reta entre rela passa pela região azul.

Todo arco, $\overset{\frown}{AB}$, sobre uma circunferência determina um *ângulo central* (ver Figura 2). Se O for o centro da circunferência, o ângulo central de $\overset{\frown}{AB}$ é o ângulo $\angle AOB$ que tem vértice O, lados OA e OB e que contem o arco $\overset{\frown}{AB}$. Também é comum escrever $A\hat{O}B$ como sinônimo de $\angle AOB$.

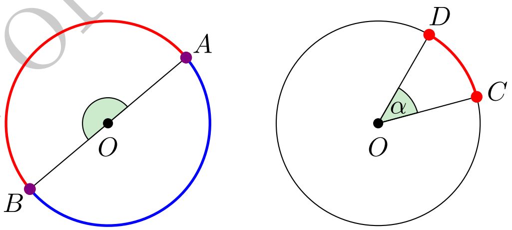


Figura 2: arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ (em vermelho) e seus ângulos centrais.

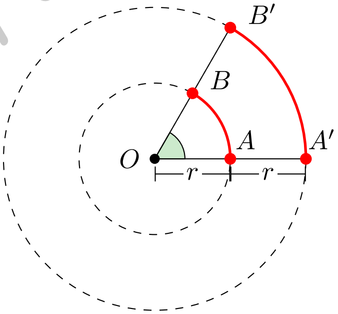
2 Sistemas de unidades de medida para arcos e ângulos

Quando se fala em medir um arco, há duas maneiras naturais de se fazer isso. A primeira delas é a medida do comprimento do arco. A segunda é a medida angular do arco, ou seja, a medida do ângulo central determinado por ele.

O comprimento de um arco $\widehat{AB}$ é o comprimento da curva que vai de A até B, ou seja, a distância que precisamos caminhar para ir de A até B, fazendo o percurso descrito pelo arco. Foge do escopo deste texto definir exatamente o que significa "comprimento". Mas vamos tomar como verdadeiro o seguinte princípio (que é uma consequência do estudo de figuras semelhantes).

> **Princípio 1**: arcos que determinam um mesmo ângulo central (em circunferências diferentes) possuem comprimentos proporcionais aos raios da circunferências às quais pertencem.

Exemplo 2. *Considere uma circunferência de raio r e outra de raio $2r$ com o mesmo centro, digamos O. Na figura abaixo temos um arco $\widehat{AB}$ sobre a circunferência menor e um arco $\widehat{A'B'}$ sobre a maior.*



Observe que o ângulo central $\angle AOB$ é igual ao ângulo $\angle A'OB'$ (ambos determinam a mesma região convexa entre *as semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*). Como o raio da circunferência maior é o dobro do raio da circunferência menor, então o comprimento do arco* $\widehat{A'B'}$ *também é o dobro do comprimento de* $\widehat{AB}$*.*

Veja que o **comprimento de um arco** é medido com unidades usuais de distância, ou seja, metros, centímetro, quilômetros, etc. Assim, supondo[2] que o comprimento de $\widehat{AB}$ na figura anterior seja de 2,5 cm, temos que o comprimento de $\widehat{A'B'}$ é 5 cm.

Uma consequência do Princípio 1 é que a divisão entre o comprimento de (uma volta completa de) um círculo, C, pelo raio deste círculo, r, resulta sempre num mesmo número. Convenciona-se que este número é igual a 2π, ou seja,

$$\frac{C}{r} = 2\pi.$$

Com isso, estamos definindo que

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{C/2}{r},$$

ou seja, π é a razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro, que é também o mesmo que a razão entre o comprimento de meia-volta no círculo e o seu raio. E este valor não depende do círculo escolhido. É conhecido que o número π é irracional e existem métodos que permitem calcular milhares de casas decimais de π. As primeiras casas são:

$$\pi = 3{,}141592\ldots.$$

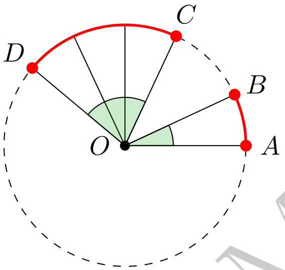
Na escola é muito comum usar 3,14 (ou até mesmo 3,1) como um valor aproximado para π, quando uma resposta extremamente precisa não se faz necessária.

Já a **medida angular** de um arco coincide com a medida de seu ângulo central. Assim, os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ do exemplo anterior possuem a mesma medida angular. Sobre isso vamos assumir o seguinte.

[2] O valor real pode variar, a depender do tamanho da tela/papel em que você está lendo este texto.

Princípio 2: arcos pertencentes a uma mesma circunferência possuem medida angular proporcional aos seus comprimentos.

Exemplo 3. *Na figura abaixo, suponha que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ seja três vezes maior que o comprimento de $\widehat{CD}$.*



Como ambos os arcos estão sobre uma mesma circunferência, a medida do ângulo central $\angle AOB$ é três vezes maior que a medida do ângulo $\angle COD$.

A fim de atribuir um valor número para a medida de um ângulo, precisamos estabelecer uma unidade de medida. Intuitivamente, medir significa comparar com um padrão e estabelecer quantas cópias da unidade padrão "cabem" no objeto que está sendo medido. As duas unidades modernas mais comuns para medir ângulos são o "Grau" e o "Radiano".

2.1 Medidas em graus

Ao usar a unidade de medida "graus", nós dividimos um círculo qualquer em 360 arcos de mesmo comprimento. O ângulo de 1° (lê-se um grau) é o ângulo central de qualquer um desses arcos. Observe que, pelo Princípio 1, o raio do circulo é irrelevante, já que estamos interessados na medida do ângulo e não no comprimento dos arcos. A Figura 3 mostra essa divisão em arcos de medida angular 1°.

Por exemplo, a região sombreada (em vermelho) na Figura 3 demarca um ângulo de 16° (dezesseis graus). Conte

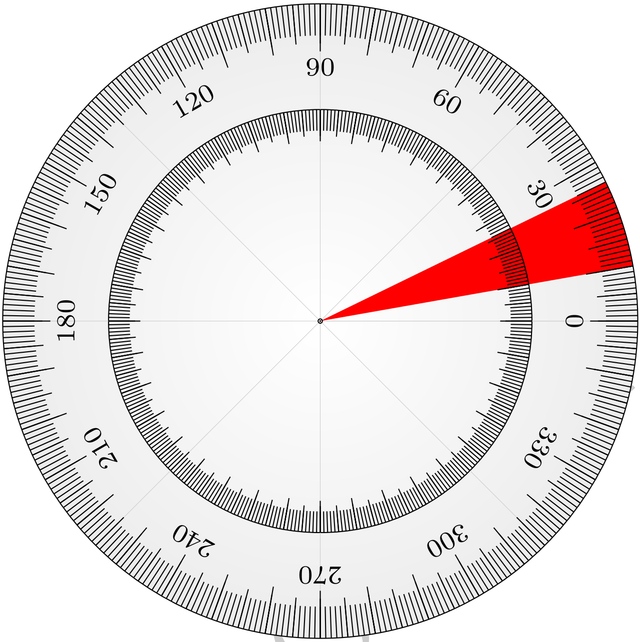


Figura 3: cada círculo desta figura foi divido em 360 arcos de mesmo comprimento.

que tanto no círculo interno como no externo, passamos por 16 arcos de 1°.

Valendo-se do Princípio 2, para medir um ângulo qualquer, basta construir um círculo (de raio arbitrário) com centro no vértice do ângulo, observar o arco formado pelos pontos de interseção do círculo com os lados do ângulo (ver Figura 4), e calcular a medida angular deste arco (ou seja, quantos arcos de medida angular 1° cambem dentro dele).

É importante lembrar que um ângulo de 180° corresponde a meia volta (pois 180 é a metade de 360); e que 90° corresponde a um ângulo reto (quando os lados do ângulo são perpendiculares) ou a um quarto de volta.

Mas porque 360 pedaços? Isso é uma herança da antiga

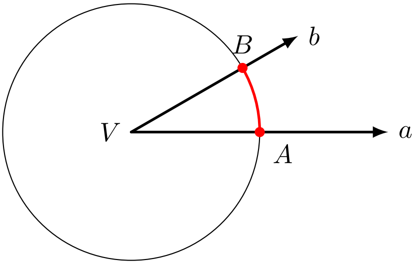


Figura 4: construindo arco à partir de um ângulo.

civilização babilônica, que também nos legou horas, minutos e segundos como unidades de medida de tempo (veja que uma hora possui 60 minutos ou $60 \cdot 60 = 3600$ segundos). Uma das vantagens do número 360 é que ele possui muitos divisores inteiros. Por exemplo, podemos dividir 360 objetos em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ou 12 grupos de mesmo tamanho, sempre obtendo uma quantidade inteira de objetos em cada grupo. Isso torna o uso da medida "graus" muito prática para o dia a dia. Além disso, aprendemos isso tão jovens que esse sistema torna-se habitual e instintivo. Por exemplo: surfistas e skatistas falam da manobra 360 para indicar uma rotação completa e quando alguém diz que vai dar um 180 nos negócios, entendemos que ela vai mudar os planos e passar a andar na direção oposta a que vinha.

Contudo, o número 360 é completamente arbitrário. Porque não dividir o círculos em 400 partes no lugar de 360? Na verdade, existe uma unidade de medida de ângulos que faz justamente isso. Ela é chamada de *grado* e já foi muito usada na navegação[3], mas caiu em desuso. E porque não dividir o círculos em 100 partes iguais, de forma que pudéssemos pensar em cada ângulo como um certo percentual de uma volta completa?

[3] O motivo é que navegar um grado sobre um meridiano terrestre corresponde a navegar aproximadamente 100 km. Contudo, como a Terra não é uma esfera perfeita, essa aproximação não é tão boa e, hoje em dia, há instrumentos de navegação bem mais precisos.

2.1.1 Submúltiplos do grau

É claro que a medida de um ângulo não precisa ser um quantidade inteira de graus. Um ângulo pode medir 27,5° (vinte e sete vírgula cinco grau, ou ainda, vinte sete graus e meio). Quando precisamos medir ângulos com melhor precisão, convém dividir o grau em partes menores. Um ângulo mede 1° quando dividido em 60 partes iguais resulta num ângulo que mede $1'$ (lê-se um minuto). Dessa forma, a metade de um grau é igual a 30 minutos. E podemos escrever:

$$27{,}5^\circ = 27^\circ 30'.$$

Cuidado: não confundir a unidade de tempo "minutos" com a unidade de medida de ângulos "minutos". Apesar do mesmo nome, elas representam conceitos completamente diferentes. O mesmo vale para "segundos". Veja, por exemplo, que um volta completa num círculo (360°) corresponde a $360 \times 60 = 21.600$ minutos (e isso não tem relação com o número de minutos em um dia, que é $24 \times 60 = 1440$).

2.2 Medidas em radianos

Apesar de que a medida de um ângulo em graus ser a mais comum em situações cotidianas. Acontece que, ao estudar Trigonometria e boa parte das matérias de cursos universitários em Matemática, o uso do "grau" como unidade de ângulo não é conveniente. Há outra unidade de medida de ângulos, que chama-se *radiano*. Ela é definida de uma maneira mais fundamental e não depende da escolha de um número arbitrário de pedaços.

Como podemos calcular o comprimento de um arco em um círculo? Como vimos acima, o comprimento de um *círculo* de raio r, onde r é qualquer número real positivo, é igual $2\pi r$ (isso vem da definição de π, que é a razão entre o comprimento do círculo pelo diâmetro); por outro lado, o Princípio 2 diz que o comprimento de um arco é proporcional à medida de seu ângulo central. Assim, lembrando que a medida (em graus) de uma volta completa no círculo é 360° e denotando por α (também em graus) a medida do ângulo central correspondente ao arco, concluímos que o comprimento desse arco é

$$C_{\text{arco}} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}. \tag{1}$$

Um **radiano** é a medida do ângulo central de um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo (ao qual o arco pertence). Abreviamos 1 radiano para 1 rad.

Pelo exposto acima, quando $\alpha = 1\,\text{rad}$, temos que $C_{\text{arco}} = r$. Logo,

$$2\pi \cancel{r} \cdot \frac{\alpha}{360°} = \cancel{r} \implies 1\,\text{rad} = \frac{360°}{2\pi} \cong 57°, \tag{2}$$

ou seja, 1 radiano vale *aproximadamente* 57 graus. A Figura 5 mostra como obter um ângulo de 1 radiano[4].

Da equação (2) acima, também obtemos a importante relação:

$$2\pi\,\text{rad} = 360°. \tag{3}$$

Equivalentemente, dividindo ambos os lados por 2, obtemos $\pi\,\text{rad} = 180°$. De modo geral, para qualquer valor em radianos, basta multiplicar esse valor por $180/\pi$ para obter o valor em graus. De modo semelhante, para fazer a conversão de graus para radianos devemos multiplicar a medida do arco (dada em graus) por $\pi/180$.

Ao estudar funções trigonométricas (como seno, cosseno e tangente), usualmente assumimos que o ângulo é dado em radianos. É interessante observar que a maioria das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão (algumas conseguem trabalhar com graus ou grados, mas é preciso mudar o modo de operação). Nesta aula, usaremos as duas medidas (graus e radianos) para nos acostumarmos à transição entre uma e outra.

[4] A esse respeito, veja a animação encontrada no endereço *https://tex.stackexchange.com/questions/443298/how-do-i-bend-a-line-onto-a-circle*.

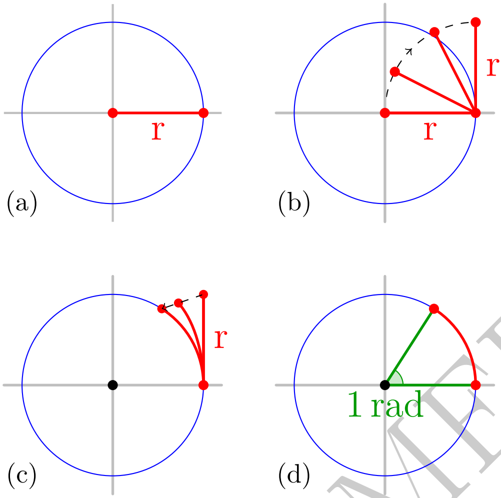
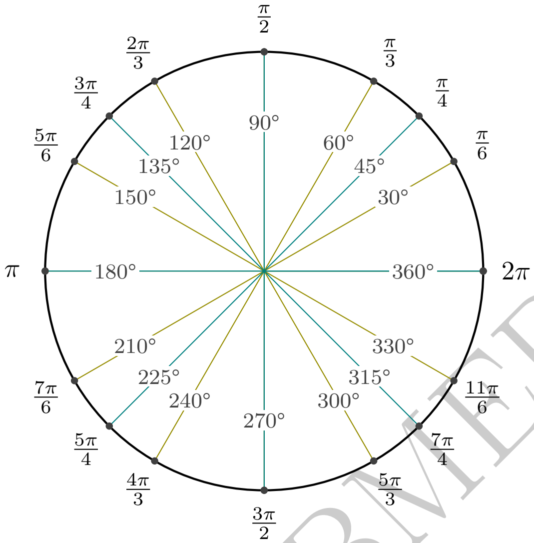


Figura 5: construção de um ângulo de 1 radiano. Todos os segmentos vermelhos possuem o mesmo comprimento: (a) círculo de raio r; (b) rotaciona um raio; (c) dobra o raio sobre o círculo; (d) marca o ângulo central de 1 rad.

Para facilitar, listamos abaixo os valores de alguns ângulos comuns em graus e em radianos.

$$2\pi\,\text{rad} = 360°, \qquad \pi\,\text{rad} = 180°, \qquad \frac{\pi}{2}\,\text{rad} = 90°,$$
$$\frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60°, \qquad \frac{\pi}{4}\,\text{rad} = 45°, \qquad \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30°.$$

A equivalência entre medidas em graus e radianos de ângulos comuns pode ser vista também na figura seguinte:



A figura acima serve apenas para consulta rápida ou para conferir suas respostas. De outra forma, seu intuito não é nos fazer memorizar todos esse valores, uma vez que a conversão entre graus e radianos pode ser feita facilmente, como nos exemplos seguintes.

Exemplo 4. *Transforme as medidas dos ângulos a seguir, de graus para radianos:*

(a) $150°$.

(b) $240°$.

Solução 1.
(a) Seja x a medida do ângulo em radianos que equivale a $150°$. Como π radianos equivalem a $180°$ e essas medidas são proporcionais, temos que:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{150°}{180°} \implies x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

(b) Seja y a medida do ângulo em radianos que equivale a 240 graus. De forma semelhante ao item anterior, temos que

$$\frac{y}{\pi} = \frac{240°}{180°} \implies y = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}.$$

Veja que esses valores são realmente os indicados na figura anterior. □

Solução 2. Conforme havíamos comentado, para realizar a conversão de graus para radianos basta multiplicar por $\pi/180$. Assim, o ângulo que corresponde a 150 graus é

$$150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad},$$

ao passo que o ângulo que corresponde a 240 graus é

$$240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}\,\text{rad}.$$

□

Exemplo 5. *Transforme as medidas dos ângulos seguintes, de radianos para graus:*

(a) $3\pi/2\,\text{rad}$.

(b) $2\pi/3\,\text{rad}$.

(c) $3\,\text{rad}$.

(d) $\pi^2/4\,\text{rad}$.

Solução. Para converter de radianos para graus, devemos multiplicar a medida em radianos por $180/\pi$. Assim fazendo, temos que:

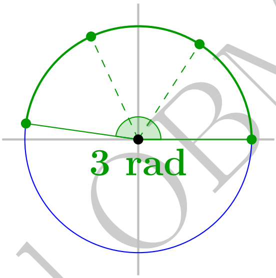
(a)
$$\frac{3\pi}{2}\,\text{rad} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°.$$

(b)
$$\frac{2\pi}{3}\,\text{rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°.$$

Observação: nos dois itens acima, para fins práticos poderíamos simplesmente substituir π rad por 180°. Mas, cuidado, pois isso só é válido quando o valor do ângulo em radianos é um número real multiplicado por π. Nos dois itens seguintes, não há como apenas substituir π por 180°.

(c) A figura a seguir mostra um ângulo de 3 radianos. Lembre-se de que $\pi \cong 3{,}14$, de forma que uma ângulo de 3 radianos é um pouco menor do que π radianos, ou seja, pouco menor do que 180°. Mais precisante, ele mede:

$$3\,\text{rad} = 3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \cong 171{,}88°.$$



(d)
$$\frac{\pi^2}{4}\,\text{rad} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{180°\pi}{4} \cong 141{,}37°.$$

Observação: os valores dos dois últimos itens podem ser obtidos com o auxílio de uma calculadora. □

Uma das vantagens de se trabalhar com radianos é que a fórmula para o comprimento do arco torna-se mais simples, conforme explica o próximo exemplo.

Exemplo 6. *Se $\widehat{AB}$ é um arco de um círculo de raio r, cujo ângulo central mede θ radianos, então o comprimento deste arco é*

$$C_{\text{arco}} = r\theta.$$

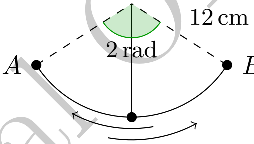
Prova. De fato, se o ângulo central mede θ radianos, temos que este ângulo mede $\theta \cdot \dfrac{360}{2\pi}$ graus. Substituindo α por esse valor na equação (1), obtemos

$$C_{\text{arco}} = 2\pi r \cdot \frac{\theta \cdot \frac{360}{2\pi}}{360} = r\theta.$$

$\square$

A fórmula do enunciado do exemplo anterior também pode ser vista da seguinte maneira: para encontrar a medida (em radianos) do ângulo central de um arco de círculo, basta dividir o comprimento do arco pelo raio do círculo. O exemplo acima é apenas um, dentre muitos outros, em que usar radianos simplifica os cálculos.

Exemplo 7. *Observe o desenho a seguir. Ele representa o esquema de um pêndulo de um relógio "cuco". Qual o comprimento do arco $\widehat{AB}$.*



Solução. Como o ângulo está expresso em radiados e cada radiano nos dá um arco cujo comprimento é igual ao raio, concluímos que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é $2 \cdot 12 = 24\,\text{cm}$.

$\square$

Dicas para o Professor

Os objetivos dessa aula são: apresentar a definição de radiano e mostrar como converter de graus para radianos e vice-versa.

À primeira vista, a noção de radianos pode parecer estranha para os alunos, pois no nosso dia a dia é muito mais comum medirmos ângulos em graus. Contudo, no Ensino Superior e em pesquisa científica a unidade padrão de medida de ângulos é o radiano. Um dos motivos é que o uso de radianos simplifica não apenas a fórmula para o comprimento de arcos no círculo unitário, como mostrado aqui, mas também inúmeras outras fórmulas (como as *derivadas* de funções trigonométricas e suas *séries de Taylor*, para citar apenas dois exemplos). O uso de radianos também simplifica o uso de várias fórmulas em Física, como por exemplo as que descrevem movimento rotacional, pois simplifica as unidades de medidas expressas em tais fórmulas.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.