Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas

Esfera - Parte 2

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de junho de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta segunda parte da aula sobre esferas, vamos aprender a calcular a área de certas partes de uma superfície esférica, bem como o volume de certas partes de uma esfera, como calotas, zonas e setores esféricos e cunhas.

1 Partes notáveis da esfera

Nesta seção, apresentamos as definições de algumas partes da esfera e vemos como calcular a área da superfície dessas partes. Também, quando for o caso, aprenderemos a calcular o volume de uma dessas partes.

Como vimos na parte 1 desta aula, um círculo máximo sobre a superfície de uma esfera é a interseção da superfície dessa esfera com um plano que passa por seu centro. Uma vez escolhidos dois pontos N e S tais que o segmento NS é um diâmetro (isto é, dois pontos *antípodas*), o círculo máximo obtido como interseção da esfera com o plano perpendicular a NS e passando por seu ponto médio O é chamado *equador* da esfera (relativamente aos polos N e S – o círculo tracejado, na figura 1).

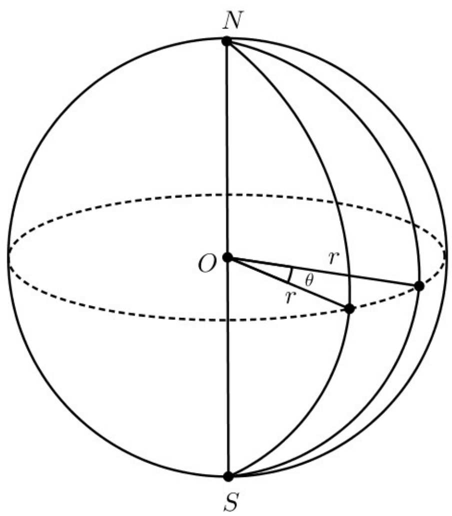

Figura 1: uma cunha esférica e seu fuso correspondente.

Chamamos de **cunha esférica** de **raio** r e **ângulo de abertura** θ a parte de uma esfera de raio r varrida por um semicírculo de diâmetro NS, à medida que tal semicírculo gira de um ângulo θ em torno de NS (veja, novamente, a figura 1).

Pode ser mostrado que o volume de uma cunha esférica de raio r é proporcional a seu ângulo de abertura θ (medido em radianos). Na linguagem de regras de três, dizemos que *o volume V_C da cunha está para seu ângulo de abertura assim como o volume da esfera está para* 2π. A partir daí, e lembrando que o volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$, obtemos

$$\frac{V_C}{\theta} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2\pi}.$$

Resolvendo a igualdade acima para V_C, obtemos

$$V_C = \frac{2\theta r^3}{3}. \tag{1}$$

Chamamos de **fuso esférico** a parte da superfície esférica compreendida entre dois círculos máximos com mesmo diâmetro (veja a figura 1). O ângulo diedro θ formado pelos planos que contêm esses semicírculos máximos é chamado de **ângulo de abertura do fuso**.

É importante perceber que uma cunha esférica é um *sólido*, ao passo que um fuso esférico é uma *porção da superfície de uma esfera*. Note, ainda, que uma cunha esférica é limitada por dois semicírculos com um mesmo diâmetro e por um fuso esférico; nesse caso, tanto a cunha quanto o fuso têm um mesmo ângulo de abertura.

Assim como ocorre com os volumes de cunhas esféricas, a área A_F de um fuso esférico de raio r é proporcional a seu ângulo de abertura θ. Recordando que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$ e vendo tal superfície como um fuso de ângulo de abertura 2π, obtemos a regra de três:

$$\frac{A_F}{\theta} = \frac{4\pi r^2}{2\pi},$$

a partir da qual

$$A_F = 2\theta r^2. \tag{2}$$

A região de uma esfera compreendida entre dois planos paralelos é chamada de uma **zona esférica**. A distância h entre esses planos paralelos é chamada **altura da zona** (veja a figura 2, na qual destacamos os dois planos que delimitam a zona esférica).

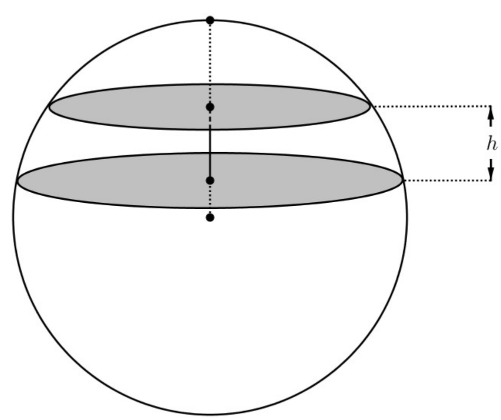

Figura 2: uma zona esférica de altura h.

A área da superfície de uma zona esférica pode ser calculada pelo mesmo método que usamos na Seção 4 da parte 1 desta aula para calcular a área de uma superfície esférica.

Para tanto, consideramos uma linha poligonal equilátera de n lados, com vértices situados sobre o arco de círculo cuja revolução gera a superfície da zona. Cada lado dessa poligonal, quando girado em torno do eixo de revolução (veja a figura 3), gera a superfície lateral de um tronco de cone. Por sua vez, a área lateral de cada um desses troncos de cone é, como sabemos,

$$A_i = 2\pi a_i h_i,$$

onde a_i é o apótema da poligonal e h_i é a altura do tronco de cone respectivo.

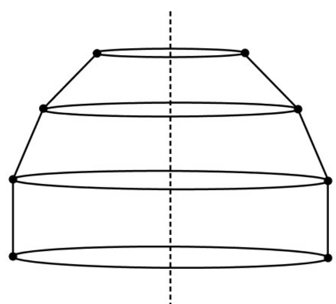

Figura 3: calculando a área de uma zona esférica.

O fato da poligonal ser equilátera garante que $a_1 = \ldots = a_n$ (pois, em um círculo, duas cordas de mesmo comprimento estão a uma mesma distância do centro). Denotando tal valor comum por a, concluímos que a área da superfície da zona esférica pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_Z &\cong 2\pi a_1 h_1 + \cdots + 2\pi a_n h_n \\ &= 2\pi a h_1 + \cdots + 2\pi a h_n \\ &= 2\pi a (h_1 + \cdots + h_n) \\ &= 2\pi a h, \end{aligned}$$

onde $h_1 + \cdots + h_n = h$ é a altura da zona esférica.

Note que, na expressão $A_Z \cong 2\pi a h$, o valor de a ainda depende do número n de lados da poligonal equilátera. Além disso, à medida que n aumenta, dois fatos ocorrem:

(i) O valor de a se aproxima mais e mais do raio r da esfera.
(ii) A discrepância entre A_Z e $2\pi a h$ fica cada vez menor.

Portanto, as aproximações $A_Z \cong 2\pi a h \cong 2\pi r h$ fornecem o valor correto para A_Z:

$$A_Z = 2\pi r h. \qquad (3)$$

Sugerimos que o leitor reveja o parágrafo 4 da parte 1 desta aula, onde os pormenores da demonstração esboçada acima estão detalhados para o caso em que $h = 2r$, ou seja, para o caso em que a zona esférica é uma esfera completa.

Consideremos, agora, um caso particular de zona esférica: dizemos que uma zona esférica é uma **calota esférica** quando um dos planos que a determinam é tangente à esfera (veja a figura 4).

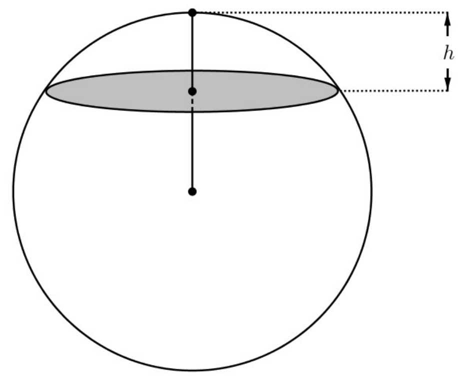

Figura 4: uma calota esférica de altura h.

Como toda calota é uma zona esférica, a área de sua superfície é determinada pela mesma fórmula (3).

A região do espaço gerada pela revolução de um setor circular AOB em torno de uma reta ℓ que passa pelo centro O da esfera é chamada **setor esférico** (veja a figura 5). Note que a área da superfície de um setor esférico coincide com a área da superfície da zona esférica determinada pelos planos perpendiculares a ℓ e passando pelos pontos A e B. A distância entre esses dois planos é chamada de **altura do setor esférico**.

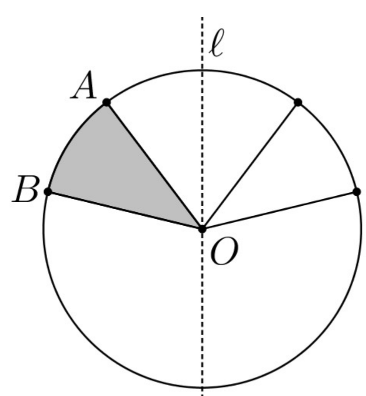

Figura 5: um setor esférico é gerado pela revolução de um setor circular.

2 Revisitando o volume da esfera

Nesta seção, iremos calcular o volume de um setor esférico. Em particular, nossas considerações fornecerão um método para o cálculo do volume de uma esfera diferente daquele visto na Seção 3 da parte 1 desta aula.

Vamos começar calculando o volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo em torno de um eixo.

Teorema 1. *Sejam ABC um triângulo e ℓ uma reta situada no plano de ABC, passando por A e não intersectando o interior de ABC. Então, o volume do sólido gerado pela revolução de ABC em torno de ℓ é igual à terça parte do produto da área da superfície gerada pela revolução do lado BC em torno de ℓ, multiplicada pela altura do triângulo relativa ao lado BC.*

Prova. Primeiramente, vamos supor que um dos lados do triângulo, digamos AB, esteja contido na reta ℓ. Suporemos, ainda que ABC é obtusângulo em C (veja a figura 6); os demais casos podem ser tratados de modo inteiramente análogo.

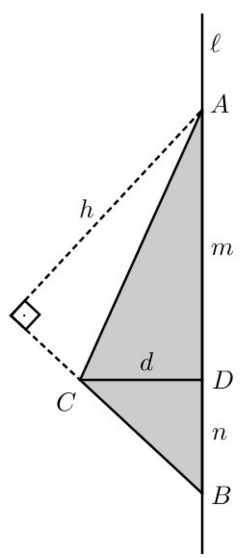

Figura 6: o triângulo ABC tem um lado sobre o eixo ℓ.

Denotemos $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = m$, $\overline{DB} = n$ e $\overline{CD} = d$, onde D é o pé da altura baixada de C ao lado AB. Seja, ainda, h o comprimento da altura relativa ao lado BC do triângulo ABC.

O sólido gerado pela revolução de ABC em torno de ℓ é formado por dois cones, gerados pelas revoluções dos triângulos ACD e BCD em torno de ℓ. Uma vez que tais cones têm raio da base igual a d e alturas iguais a m e n, o volume V do sólido gerado pela revolução de ABC em torno de ℓ é dado por

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi d^2 m + \frac{1}{3}\cdot\pi d^2 n = \frac{1}{3}\cdot\pi d^2(m+n) = \frac{1}{3}\cdot\pi d^2 c.$$

Como os produtos cd e ah são ambos iguais ao dobro da área do triângulo ABC, temos $dc = ha$. Logo,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi d\cdot cd = \frac{1}{3}\cdot\pi d\cdot ah = \frac{1}{3}\cdot\pi ad\cdot h. \tag{4}$$

Observe que a superfície gerada pela revolução do lado BC em torno de ℓ é a superfície do cone gerado pela revolução do triângulo BCD. Então, sua área é πad, e o resultado do Teorema é válido neste caso.

Suponha, agora, que o triângulo ABC tem em comum com a reta ℓ apenas o ponto A, mas que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ não é paralela a ℓ (veja a figura 7). Seja D o ponto de interseção entre $\overleftrightarrow{BC}$ e ℓ e suponha, sem perda de generalidade, que C está entre B e D (o caso em que B está entre C e D pode ser tratado de modo análogo).

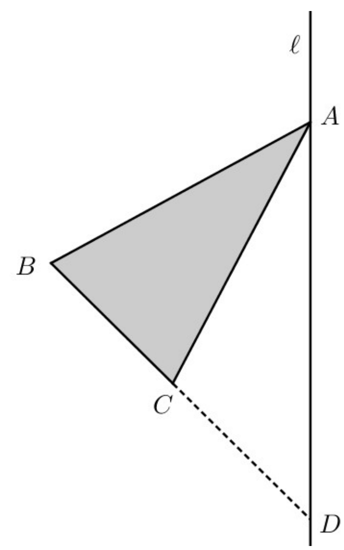

Figura 7: o triângulo ABC tem apenas o ponto A sobre o eixo ℓ.

Sendo V, V_1 e V_2 os volumes dos sólidos gerados pelas revoluções dos triângulos ABC, ABD e ACD em torno de ℓ, respectivamente, temos $V = V_1 - V_2$.

Como a altura h do triângulo ABC relativa ao lado BC é igual à altura do triângulo ABD relativa ao lado BD e também à altura do triângulo ACD relativa ao lado CD, temos, pelo primeiro caso, $V_1 = \frac{1}{3}\cdot A_1\cdot h$ e $V_2 = \frac{1}{3}\cdot A_2\cdot h$, onde A_1 e A_2 são as áreas das superfícies geradas pela revolução dos segmentos BD e CD, respectivamente, em torno de ℓ. Assim,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\cdot(A_1 - A_2)h,$$

e é fácil ver que $A_1 - A_2$ é a área da superfície gerada pela revolução do segmento BC em torno de ℓ.

Finalmente, resta analisar o caso em que o lado BC é paralelo à reta ℓ (veja a figura 8). Nele, não podemos usar o argumento acima, pois não existirá ponto de interseção D entre $\overleftrightarrow{BC}$ e ℓ.

Sejam D o pé da perpendicular baixada de A a $\overleftrightarrow{BC}$ e E e F os pés das perpendiculares baixadas de C e B, respectivamente, a ℓ. Sendo r a distância entre $\overleftrightarrow{BC}$ e ℓ, segue que $\overline{AD} = \overline{FB} = \overline{EC} = r$.

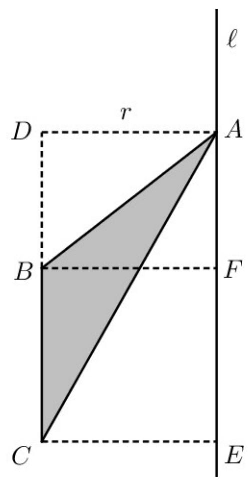

Figura 8: o triângulo ABC tem o lado BC paralelo ao eixo ℓ.

Suponha, sem perda de generalidade, que B está situado entre C e D (os casos em que C está situado entre B e D, ou D está situado entre B e C, podem ser tratados de modo análogo.

O sólido cujo volume V desejamos calcular (e que é gerado pela revolução do triângulo ABC em torno de ℓ) pode ser visto como o sólido gerado pela revolução do trapézio $ABCE$ em torno de ℓ, exceto pela porção correspondente ao sólido gerado pela revolução do triângulo ACE em torno de ℓ.

Sendo V_1 o volume do sólido gerado pela revolução do trapézio $ABCE$ em torno de ℓ e V_2 o volume do sólido gerado pela revolução do triângulo ACE em torno de ℓ, temos $V = V_1 - V_2$.

Para calcular V_1, vemos o sólido gerado pela revolução do trapézio $ABCE$ em torno de ℓ como a união do cilindro gerado pela revolução do retângulo $BCEF$ em torno de ℓ com o cone gerado pela revolução do triângulo ABF em torno de ℓ. Portanto,

$$V_1 = \pi r^2 \cdot \overline{EF} + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AF}. \tag{5}$$

Quanto a V_2, temos

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AE} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AF} + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{EF}, \tag{6}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{EF}$.

Finalmente, calculando $V = V_1 - V_2$ a partir de (5)$-$(6), obtemos prontamente

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{EF} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot \overline{EF} \cdot r \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot \overline{EF} \cdot \overline{AD}. \end{aligned}$$

Na última expressão acima, $2\pi r \cdot \overline{EF}$ é a área lateral do cilindro gerado pela revolução do retângulo $BCEF$ em torno de ℓ, que é justamente a área da superfície gerada pela revolução do segmento BC em torno de ℓ; por outro lado, $\overline{AD}$ é o comprimento da altura de ABC relativa a BC. Isso demonstra o teorema também neste caso. □

Continuando na direção do cálculo do volume de um setor esférico, precisamos agora do seguinte conceito: uma **poligonal regular** $P_1P_2 \ldots P_n$ é um conjunto de segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ que têm um mesmo comprimento e tais que os ângulos entre dois segmentos consecutivos $P_{i-1}P_i$ e P_iP_{i+1} são todos congruentes (veja a figura 9). Os pontos $P_1, \ldots, P_n$ são chamados **vértices** da poligonal.

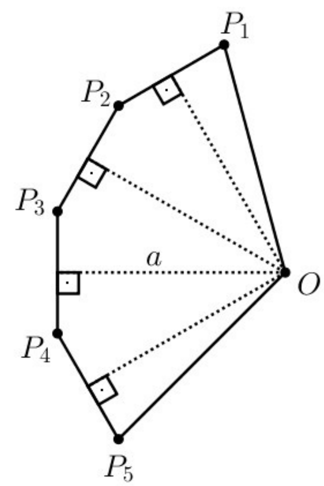

Figura 9: uma poligonal regular e seu setor poligonal correspondente.

Não é difícil mostrar que toda poligonal regular tem um **centro**, que é o único ponto do plano situado a uma mesma distância de seus vértices. Assim, sendo $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ uma poligonal regular e O seu centro, temos que $\overline{OP_i} = r$ é constante, para qualquer vértice P_i da poligonal. O polígono $OP_1P_2 \cdots P_n$ é chamado o **setor poligonal**, de centro O, associado à poligonal regular $P_1P_2 \cdots P_n$.

Nas notações do parágrafo anterior, cada um dos triângulos OP_iP_{i+1} é isósceles de base P_iP_{i+1}; portanto, a altura baixada de O ao lado P_iP_{i+1} incide no ponto médio desse lado. Sendo $\overline{P_1P_2} = \ldots = \overline{P_{n-1}P_n} = 2l$, o Teorema de Pitágoras garante que o comprimento dessa altura mede

$$a = \sqrt{r^2 - l^2},$$

logo, independe do índice $1 \leq i \leq n-1$. Tal comprimento a é o **apótema** da poligonal regular (e do setor poligonal).

Vamos, agora, calcular o volume do sólido gerado pela revolução de um setor poligonal em torno de uma reta que passa por seu centro.

Teorema 2. *Seja $OP_1P_2\ldots P_n$ um setor poligonal de centro O e apótema a. Seja ℓ uma reta situada no mesmo plano que o setor poligonal, passando por seu centro mas não intersectando seu interior. Se A é a área da superfície gerada pela revolução da poligonal em torno de ℓ, então o volume V do sólido gerado pela revolução do setor poligonal em torno de ℓ é*

$$V = \frac{1}{3} \cdot Aa.$$

Prova. O setor poligonal pode ser dividido em n triângulos $OP_1P_2, OP_2P_3, \ldots, OP_{n-1}P_n$ (a figura 10 mostra o caso $n = 5$). Se V_i é o volume do sólido gerado pela revolução de OP_iP_{i+1} em torno de ℓ e A_i é a área da superfície gerada pela revolução de P_iP_{i+1} em torno de ℓ, é imediato que $V = V_1 + \cdots + V_n$ e $A = A_1 + \cdots + A_n$.

Para cada índice $1 \leq i \leq n-1$, podemos aplicar o Teorema 1 ao triângulo OP_1P_{i+1} para concluir que $V_i = \frac{1}{3} \cdot aA_i$. Assim,

$$V = V_1 + \cdots + V_n = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + \cdots + A_n)a = \frac{1}{3} \cdot Aa.$$

□

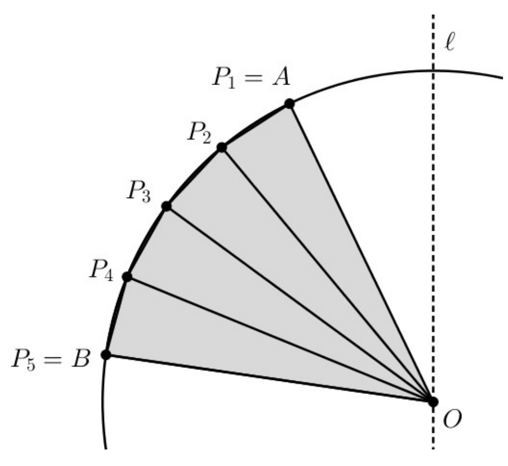

Figura 10: um setor circular e um setor poligonal inscrito.

Chegamos, finalmente, ao resultado desejado.

Teorema 3. *O volume V_S de um setor esférico de altura h em uma esfera de raio r é*

$$V_S = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h. \tag{7}$$

Prova. Seja $S_n = OP_1P_2\ldots P_n$ um setor poligonal, com $P_1 = A$ e $P_n = B$ (para melhor acompanhamento, referimos novamente o leitor à figura 10, onde o caso $n = 5$ é ilustrado).

À medida em que n aumenta, o volume V_n do sólido gerado pela revolução do setor S_n em torno de ℓ fica cada vez mais próximo do volume V do setor esférico gerado pela revolução do setor circular AOB em torno de ℓ. Indicamos esse fato dizendo que V_n **tende** a V quando n aumenta indefinidamente.

Pelo Teorema 2, $V_n = \frac{1}{3} \cdot A_n a_n$, onde A_n é a área da superfície gerada pela revolução da poligonal $P_1 \ldots P_n$ em torno de ℓ e a_n é o apótema do setor poligonal S_n.

Quando n aumenta indefinidamente, a_n tende ao raio r da esfera e A_n tende à área $A = 2\pi rh$ da superfície do setor esférico (calculada a partir de (3)). Consequentemente, o volume V_n tende a

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi rh \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Dessa forma, como o volume V_n se aproxima simultaneamente de V e de $\frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h$, esses dois números são, necessariamente, iguais. □

Como caso particular do teorema anterior, consideremos, numa esfera de raio r, um setor esférico de altura $h = 2r$. Então, é imediato que tal setor corresponde a toda a esfera, de sorte que (7) fornece o seguinte

Corolário 4. *O volume V de uma esfera de raio r é dado por*

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3.$$

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Na Seção 2, obtemos um método para calcular o volume de um setor esférico e, consequentemente, para calcular o volume de uma esfera. Dessa forma, você pode abordar o problema do cálculo do volume de uma esfera sem a necessidade de usar o Princípio de Cavalieri.

As noções de poligonal regular e setor poligonal são definidas na Seção 2. Note que, embora tenhamos trabalhado antes com poligonais tanto na parte 1 desta aula quanto na

Seção 1, ao fazê-lo sempre consideramos poligonais inscritas em círculos. A definição de poligonal regular permite que trabalhemos com poligonais sem a necessidade de considerar um círculo *a priori*. Se você julgar conveniente, pode introduzir a noção de poligonal regular bem antes, ainda na parte 1 desta aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
3. O. Dolce, J. N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol.10, sétima edição, São Paulo, 2013.
4. F.I.C., *Elementos de Geometria*, Revistos e adaptados por Eugênio de Barros Raja Gabaglia, Livraria Garnier, Paris, 1933.