Material Teórico - Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Probabilidade condicional

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

19 de outubro de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Probabilidade condicional

Continuamos com a resolução de exercícios, desta vez centrando nossa atenção no tema probabilidade condicional e no Teorema de Bayes a fim de reforçar as ideias estudadas no módulo "Probabilidade Condicional" do segundo ano do Ensino Médio.

Exemplo 1. *Há três moedas, duas delas normais e uma defeituosa, pois possui duas caras. Escolhe-se, ao acaso, uma dessas moedas, a qual é lançada três vezes.*

(a) Qual é a probabilidade de serem obtidas três caras?

(b) Obtiveram-se três caras. Qual a probabilidade de ter sido lançada a moeda defeituosa.

Solução. Já que "cara" e "coroa" ambos começam com a letra C, vamos convencionar aqui a letra K para representar a obtenção de uma cara e a letra C para coroa. A árvore de probabilidades com os possíveis resultados é exibida na Figura 1. Além disso, vamos chamar de D a moeda defeituosa e de N a moeda normal.

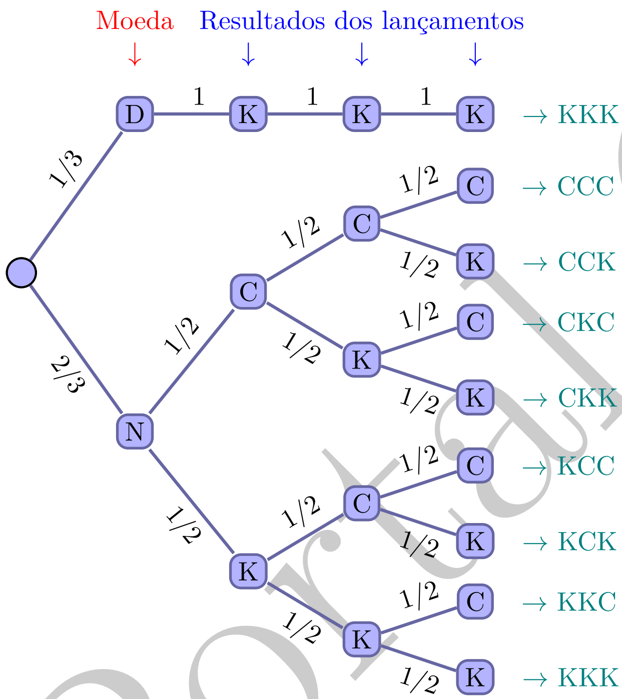


Figura 1: A árvore mostra a escolha da moeda, com probabilidade de 1/3 para a escolha da defeituosa (D) e de 2/3 para a escolha da normal (N), seguida de três lançamentos da moeda escolhida.

(a) Este item pode ser revolvido de maneira direta. Há duas maneiras de se obter 3 caras (KKK):

Caso 1: ao escolher a moeda, pegamos a defeituosa. Isso acontece com probabilidade 1/3 e, uma vez escolhida a moeda, todos os resultados obtidos serão caras (K).

Caso 2: ao escolher a moeda, pegamos uma normal; essa escolha é satisfeita com probabilidade 2/3 e, depois disso, temos probabilidade $(1/2)^3$ para que os três lançamentos resultem em cara. Assim, a probabilidade desejada é:

$$\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

(b) Aqui estamos restringindo o espaço de probabilidade, pois já sabemos que foram obtidas 3 caras. Ou seja, queremos calcular a probabilidade condicional $\Pr(\mathrm{D} \mid \text{"3 caras"})$, onde D é o evento "escolher a moeda defeituosa" e "3 caras" é o evento de se obter três caras. Lembre-se de que:

$$\Pr(\mathrm{D} \mid \text{"3 caras"}) = \frac{\Pr(\mathrm{D} \cap \text{"3 caras"})}{\Pr(\text{"3 caras"})}.$$

Veja que $\Pr(\mathrm{D} \cap \text{"3 caras"}) = \Pr(\mathrm{D}) = 1/3$, já que o evento D está contido no evento "3 caras" (sempre que D acontece, são obtidas 3 caras). Por sua vez, $\Pr(\text{"3 caras"})$ já foi calculada no item anterior. Logo, a probabilidade desejada é:

$$\Pr(\mathrm{D} \mid \text{"3 caras"}) = \frac{(1/3) \cdot 1}{5/12} = \frac{4}{5} = 80\%. \qquad \square$$

No segundo item do exemplo anterior, temos um problema um pouco diferente dos outros estudados até agora, pois não estamos interessados em calcular a probabilidade de um evento que está por acontecer, mas sim em saber a probabilidade de um evento já ter ocorrido. Dizemos isso pois podemos pensar que, no momento em que as três caras são observadas, a escolha da moeda já havia sido realizada. Do ponto de vista da teoria das probabilidades, formalmente não há qualquer diferença entre estudar eventos passados ou futuros (a mesma teoria de probabilidade condicional se aplica).

É possível imaginar essa situação no mundo real: a pessoa que lançou a moeda do exemplo acima estava vendada e não poderia ver se estava lançando a moeda normal ou a defeituosa, mas removia a venda para ver o resultado do lançamento. Após os três lançamentos, ela deve apostar se está segurando a moeda normal ou defeituosa. O que mostramos é que, caso ela tenha obtido três caras, ela tem 80% de chance de ganhar apostando que está com a moeda defeituosa. Uma maneira de intuir o porque dessa probabilidade ser tão alta é extrapolar o exemplo, considerando uma situação mais extrema: Imagine que foram realizados 10 lançamentos, no lugar de 3, e foi observado cara em todos eles. É muito mais provável que a moeda escolhida tenha sido a defeituosa, pois o evento de obter 10 caras com a moeda normal é muito improvável.

Exercício 2. *Refaça os cálculos do exemplo anterior, usando as mesmas três moedas mas supondo que foram* *realizados* 10 *lançamentos, ao invés de* 3*; suponha, ainda, que foram obtidas caras em todos os lançamentos.*

Esse tipo de técnica pode ser aplicada em análises estatísticas avançadas e em técnicas modernas como "aprendizado de máquina", quando se deseja verificar o quão provável é certa hipótese após ter-se verificado o resultado de um experimento. Essas análises são bem mais difíceis e fogem do escopo do Ensino Médio, mas um de seus fundamentos é o Teorema de Bayes, que é bastante simples, apesar de normalmente não ser apresentado durante o Ensino Médio. Eles nos dá uma maneira de inverter o condicionamento, com uma fórmula que calcula $\Pr(A \mid B)$ em função de $\Pr(B \mid A)$.

Teorema 3 (Bayes). *Se A e B são eventos de um mesmo espaço de probabilidade, temos que:*

$$\begin{aligned}\Pr(A \mid B) &= \frac{\Pr(B \mid A)\Pr(A)}{\Pr(B)}\\ &= \frac{\Pr(B \mid A)\Pr(A)}{\Pr(B \mid A)\Pr(A) + \Pr(B \mid A^{\complement})\Pr(A^{\complement})}.\end{aligned}$$

Prova. Lembre-se de que:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}. \tag{1}$$

Por outro lado, $\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(A)}$. A última equação implica $\Pr(A \cap B) = \Pr(B \mid A)\Pr(A)$. Substituindo isso em (1), temos:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A)\Pr(A)}{\Pr(B)},$$

o que prova a primeira parte do Teorema de Bayes.

Para a segunda parte, basta provar que

$$\Pr(B) = \Pr(B \mid A)\Pr(A) + \Pr(B \mid A^{\complement})\Pr(A^{\complement}). \tag{2}$$

Ora, vimos acima que $\Pr(B \mid A)\Pr(A) = \Pr(B \cap A)$; da mesma forma (trocando A por $A^{\complement}$), obtemos a equação $\Pr(B \mid A^{\complement})\Pr(A^{\complement}) = \Pr(B \cap A^{\complement})$. Como $B \cap A$ e $B \cap A^{\complement}$ são eventos disjuntos cuja união é igual a B, temos que $\Pr(B) = \Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap A^{\complement})$, o que implica (2). □

Veja que o Exemplo 1 também poderia ter sido resolvido diretamente aplicando o Teorema de Bayes. Porém, optamos por utilizar a árvore de probabilidades ao invés de simplesmente aplicar uma fórmula, pois desenhando toda a árvore podemos ver como maior clareza todo o espaço de probabilidade. No "mundo real" o Teorema de Bayes é útil, pois muitas vezes a quantidade de casos é muito grande para se visualizar a árvore completa.

Exemplo 4. *Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num dado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolsa e mostra ao jogador. Qual a probabilidade de:*

(a) O juiz ver a face vermelha e o jogador ver a face amarela?

(b) O jogador ver uma face vermelha, sabendo que o juiz vê uma face vermelha?

Solução. Podemos visualizar as possíveis escolhas na árvore de probabilidades da Figura 2 (onde V representa a cor vermelha e A a cor amarela).

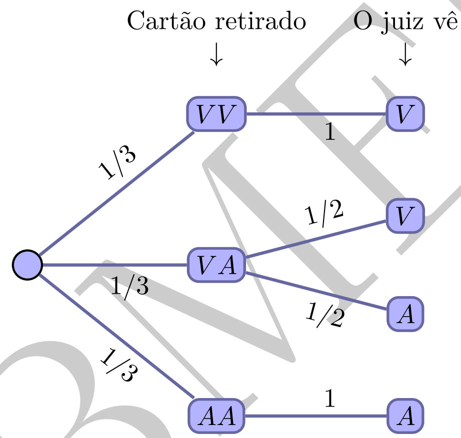


Figura 2: Escolha do cartão seguida da escolha do lado desse cartão que o juiz vê.

(a) A probabilidade pedida neste item pode ser calculada diretamente. Veja que apenas um cartão possui cores diferentes dos dois lados. A probabilidade de escolher esse cartão é $1/3$ (um entre três possíveis cartões). Em seguida, a probabilidade de que a face vermelha do cartão esteja virada para o juiz é $1/2$. Por fim, o que se pede no item é a probabilidade de que essas duas coisas aconteçam sucessivamente, que é:

$$\Pr = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

(b) Vamos chamar de $\mathrm{Jg}(V)$ o evento "o jogador vê uma face vermelha" e de $\mathrm{Jz}(V)$ o evento "o Juiz vê uma face vermelha". Queremos calcular a probabilidade de $\mathrm{Jg}(V)$ condicionada ao evento $\mathrm{Jz}(V)$, que é dada por:

$$\Pr(\mathrm{Jg}(V) \mid \mathrm{Jz}(V)) = \frac{\Pr(\mathrm{Jg}(V) \cap \mathrm{Jz}(V))}{\Pr(\mathrm{Jz}(V))}.$$

O evento $\mathrm{Jg}(V) \cap \mathrm{Jz}(V)$ acontece se, e somente se, o cartão VV (com as duas faces vermelhas) for sorteado. Logo, $\Pr(\mathrm{Jg}(V) \mid \mathrm{Jz}(V)) = 1/3$, que é a probabilidade de selecionar esse cartão. Resta calcular $\Pr(\mathrm{Jz}(V))$. Observando a árvore, há apenas duas maneiras do juiz ver a cor vermelha: Se o cartão VV for sorteado, o que ocorre com probabilidade $1/3$, o juiz com certeza verá vermelho; se o cartão VA for sorteado, o que ocorre com probabilidade $1/3$, o juiz terá $1/2$ de chance de que o lado vermelho esteja virado para ele. Logo,

$$\Pr(\mathrm{Jz}(V)) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Com isso, concluímos que a probabilidade desejada no enunciado é

$$\Pr(\mathrm{Jg}(V) \mid \mathrm{Jz}(V)) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

Observação 5. *Baseado na árvore da Figura 2, podemos dizer diretamente que* $\Pr(\mathrm{Jz}(V)) = 1/2$*, mas cuidado: isso não é simplesmente porque metade dos resultado é* V*. Isso só ocorre porque para cada resultado* V *existe um* A *que possui a mesma probabilidade (ou seja, os pesos nos ramos da árvore são importantes). De certa forma, o que acontece é que os papeis das cores são totalmente simétricos; logo, não há razão para uma cor ser mais provável de ser vista do que a outra.*

Solução Alternativa. Conforme acabamos de observar, o conjunto de possíveis resultados exibidos nos quatro ramos da árvore da Figura 2 não são equiprováveis. (De fato, por isso mesmo os valores das probabilidades indicadas na árvore são importantes.)

Mas existe uma maneira de criar um espaço de probabilidade equiprovável: numerando cada uma das faces dos cartões, quando elas tiverem a mesma cor. Assim, chamaremos o cartão VV de V_1V_2, o cartão AA de A_1A_2 (mas o cartão VA por continuar sendo chamado VA).

Com isso, há seis possibilidades para o que juiz e jogador veêm, sendo que todas elas possuem a mesma probabilidade. Os seis casos são indicados na tabela abaixo.

Juiz	Jogador
V	A
A	V
V	V_2
V_2	V_1
A_1	A_2
A_2	A_1

De posse dessa tabela, podemos responder cada item:

(a) A tabela contém apenas um caso dentre os seis (equiprováveis) em que o juiz vê vermelho e o jogador amarelo. Logo, a probabilidade desejada é $1/6$.

(b) Como na solução anterior, queremos calcular:

$$\Pr(\mathrm{Jg}(V) \mid \mathrm{Jz}(V)) = \frac{\Pr(\mathrm{Jg}(V) \cap \mathrm{Jz}(V))}{\Pr(\mathrm{Jz}(V))}.$$

Há três casos em que o Juiz vê vermelho e, dentre eles, há dois nos quais o jogador também vê vermelho. Assim, a probabilidade desejada é $2/3$. $\square$

Exemplo 6. *Uma certa doença afeta* 1% *de uma população (isso é a chamada "prevalência" da doença) . Um teste acerta em* 95% *dos casos quando o paciente é sadio (a "especificidade" do teste é de* 95%*) e acerta em* 90% *dos casos quando o paciente é doente (a "sensibilidade" do teste é* 90%*). Se João é um indivíduo desta população e seu resultado der positivo, qual a probabilidade de João realmente estar doente?*

Solução. Dizer que o teste *acerta* quando o paciente é sadio quer dizer que o teste retorna *negativo* neste caso; por outro lado, dizer que ele *acerta* em casos em que o paciente está doente quer dizer que ele retorna *positivo* nesses casos. Isso nos dá a árvore de probabilidades da Figura 3.

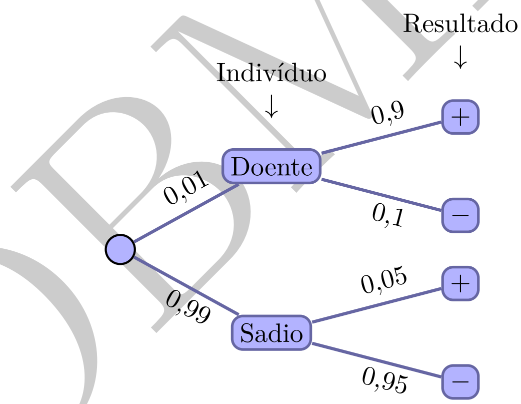


Figura 3: Escolha do indivíduo seguida do resultado de seu teste.

Dado que o resultado foi positivo para certo indivíduo, queremos queremos calcular a probabilidade dele, de fato, estar doente. Em símbolos, queremos $\Pr(\text{Doente} \mid \text{“}+\text{”})$. Observando a árvore, temos que $\Pr(\text{“}+\text{”}) = 0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99$. Com isso, a probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Doente} \mid \text{“}+\text{”}) &= \frac{\Pr(\text{Doente} \cap \text{“}+\text{”})}{\Pr(\text{“}+\text{”})} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99} = 15{,}38\%.\end{aligned}$$

$\square$

Solução Alternativa. Para simplificar as contas, vamos supor que a população total seja de 10.000 indivíduos. Como 1% deles é doente, há 100 indivíduos doentes e 9900 saudáveis. Dos doentes, 90% teriam resultado positivo no teste, ou seja, 90 indivíduos. Por outro lado, dos saudáveis, 95% tem resultado negativo, ou seja, $0{,}95 \cdot 9900 = 9405$ indivíduos. Com isso, podemos montar a tabela a seguir:

	Doentes (D)	Saudáveis (S)	Total
Positivos (P)	90	495	585
Negativos (N)	10	9405	9415
Total	100	9900	10000

Assim, o universo de indivíduos que possuem resultado positivo tem 585 pessoas. Dentre essas, 90 são doentes. Logo, a probabilidade desejada é:

$$\Pr(\text{Doente} \mid \text{“}+\text{”}) = \frac{\Pr(\text{Doente} \cap \text{“}+\text{”})}{\Pr(\text{“}+\text{”})} = \frac{90}{585} = 15{,}38\%.$$

□

Observação 7. *Para um teste que acerta pelo menos* 90% *das vezes, tanto para indivíduos sadios como para indivíduos doentes, parece ser contraditório que apenas cerca de* 15% *dos resultados positivos sejam realmente positivos. Isso já havia sido abordado na seção “O paradoxo do falso positivo” da Parte* 2 *da Aula* 1 *do Módulo Probabilidade Condicional. A explicação específica para o resultado do Exercício* 6 *é que a prevalência da doença é pequena. Assim, mesmo que o teste erre apenas* 5% *das vezes em indivíduos saudáveis, isso gera uma quantidade de indivíduos com falsos positivos que é maior do que os verdadeiros positivos. Isso fica claro na solução alternativa, que evidencia* 495 *falsos positivos (indivíduos saudáveis mas com resultado positivo), contra apenas* 90 *positivos verdadeiros.*

De toda forma, testes desse tipo são benéficos como testes de triagem, ou seja, testes de baixo custo e que sugerem continuidade nas investigações (via exames mais caros e específicos) no caso do resultado ser positivo (antes do início de um tratamento). A ideia é que é melhor pecar pelo excesso de zelo do que pela falta dele. Veja que a probabilidade de um falso negativo, ou seja, $\Pr(\text{Doente} \mid \text{“}-\text{”})$ *é muito pequena (sendo apenas um décimo da prevalência da doença). Assim, quem obtêm resultado negativo pode ficar tranquilo quando à confiabilidade desse teste. Ela pode ser calculada como:*

$$\Pr(\text{Doente} \mid \text{“}-\text{”}) = \frac{\Pr(\text{Doente} \cap \text{“}-\text{”})}{\Pr(\text{“}-\text{”})} = \frac{10}{9415} \cong 0{,}001.$$

Exemplo 8. *Os casais A e B têm dois filhos cada um. Sabe-se que o casal A tem um filho homem e que o filho mais velho do casal B também é homem. Se a e b indicam, respectivamente, a probabilidade de que os dois filhos do casal A sejam homens e a probabilidade de que os dois filhos do casal B sejam homens, decida se $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.*

Solução. No que segue, representamos pela letra H um filho homem e pela letra M uma filha mulher. Também, em cada par ordenado o primeiro elemento representa o(a) filho(a) mais velho(a) e o segundo elemento representa o(a) filho(a) mais novo(a).

A princípio, temos 4 possibilidades equiprováveis: (H, H), (H, M), (M, H) e (M, M). Isso quer dizer que, dentre um grupo de 100 casais, espera-se que 1/4 deles, ou seja, 25 casais, tenham ambos os filhos homens; 25 tenham o primeiro filho homem e o segundo mulher; 25 tenham o primeiro mulher e o segundo homem; 25 tenham duas filhas mulheres.

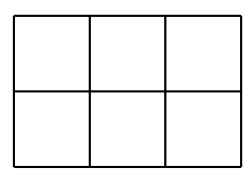
Considere que o casal A foi selecionado aleatoriamente desse grupo. Com a informação adicional de que esse casal possui (pelo menos) um filho homem, descarta-se o caso (M, M) e sobram apenas três possibilidades equiprováveis: (H, H), (H, M) e (M, H). Assim, a probabilidade de que os dois filhos desse casal sejam homens é $1/3$, ou seja, $a = 1/3$. No exemplo numérico acima, temos 25 casais com dois filhos homens, em um universo de 75 casais que possuem pelo menos um filho homem.

Considere, agora, o casal B. Sabemos que seu primeiro filho é homem, logo, das quatro possibilidade iniciais, sobram apenas duas: (H, M) e (H, H). Como essas duas são equiprováveis, a probabilidade de que os dois filhos sejam homens é $1/2$, ou seja, $b = 1/2$. Em relação ao exemplo numérico, temos os mesmos 25 casais, mas num universo que está restrito a apenas 50 casais.

Concluímos, portanto, que $a < b$. □

Observação 9. *No exemplo anterior, é muito tentador achar que $a = b$. A grande diferença é que dizer que o “filho mais velho é homem” é algo mais restritivo do que dizer que “pelo menos um filho é homem” o que altera o universo onde a probabilidade é condicionada.*

Exemplo 10 (UFRS). *Cada cartela de uma coleção é formada por seis quadrados coloridos, justapostos como na figura abaixo:*



Em cada cartela, dois quadrados são coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. Nessas condições, a coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição das cores nas cartelas e não existem cartelas com uma mesma distribuição de cores. Retirando-se, ao acaso, uma cartela da coleção, a probabilidade de que apenas uma das colunas apresentes quadros de mesma cor é de:

(a) 5%.

(b) 36%.

(c) 40%.

(d) 48%.

(e) 90%.

Solução. Esse problema, em verdade, pode ser resolvido diretamente, sem o uso do conceito de probabilidade condicional, definindo o espaço amostral de maneira adequada.

Primeiramente, vamos contar quantos são os cartões. Isso pode ser feito calculando quantas são as permutações de 6 elementos (cada cartela por ser identificada por uma sequência de seis cores) com elementos repetidos (2 azuis, 2 verdes e 2 rosas). O resultado é $P^6_{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$. Um outra possibilidade é utilizar combinações: escolhemos duas posições das 6 para a cor azul, outras duas posições para a cor verde e as demais serão automaticamente rosas. O resultado é $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$, como antes.

Resta contar quantos cartões possuem *exatamente* uma coluna com duas cores iguais. Para tanto, começamos escolhendo qual coluna terá duas cores iguais, depois escolhemos qual será essa cor, o que nos dá $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades. Por fim, devemos organizar as duas cores que sobraram nas 2 colunas que sobraram, sem que haja duas cores iguais numa mesma coluna. Isso pode ser feito de 4 maneiras possíveis (abaixo x e y representam as duas cores que sobraram):

x	x
y	y

x	y
y	x

y	y
x	x

y	x
x	y

.

Então, o total de cartões que satisfazem as restrições do enunciado é $9 \cdot 4 = 36$ e a probabilidade desejada é

$$\frac{36}{90} = \frac{4}{10} = 40\%.$$

Logo, o item correto é (c). □

O exemplo seguinte será um aquecimento para o último exemplo desta aula. Ele é um problema difícil, mas bem interessante.

Exemplo 11. *Em uma cidade, cada pessoa fala a verdade com probabilidade* $1/3$. *Suponha que A faz uma afirmação e que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter realmente falado a verdade?*

Solução. Sem qualquer informação adicional, diríamos que A tem $1/3$ de chance de falar a verdade. Porém, temos uma informação adicional: B diz que A falou a verdade. Veja que estamos em uma cidade de mentirosos (cada pessoa fala a verdade em bem menos que a metade das vezes), assim, quando B diz que A falou a verdade, é provável que ele esteja mentindo, o que muda as chances de A ter falado a verdade.

Seja E a sentença (ou proposição lógica) "B diz que A falou a verdade". Queremos calcular:

$$\Pr(A \text{ falou a verdade} \mid E) = \frac{\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \cap E)}{\Pr(E)}.$$

Veja que E precisa ser verdadeira, pois é um fato certo que "B disse que A falou a verdade". No entanto, há duas maneiras disso ter acontecido: (a) A realmente falou a verdade e B também falou a verdade; (b) A mentiu em sua afirmação inicial mas B também mentiu, por isso ele disse que A falou a verdade. O caso (a) acontece com probabilidade $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ e o caso (b) acontece com probabilidade $\left(\frac{2}{3}\right)^2$. (Veja que outros casos não devem ser considerados: por exemplo, se A mentir e B falar a verdade, então B terá que dizer que A mentiu, mas não foi isso que aconteceu.) Sendo assim,

$$\Pr(E) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Para terminar, basta calcular $\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \cap E)$. Ora, a única maneira de $A \cap E$ acontecer é no caso (a) da análise acima. Logo $\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \cap E) = (1/3)^2 = 1/9$.

Com isso, a probabilidade desejada é:

$$\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \mid E) = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5} = 20\%. \qquad \square$$

Exemplo 12. *Em uma cidade cada pessoa fala a verdade com probabilidade* $1/3$. *Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?*

Solução. De forma semelhante ao exemplo anterior, seja E a afirmação "D diz que C diz que B diz que A falou a verdade". Cada uma das pessoas A, B, C e D pode ter falado a verdade ou mentido, mas sabemos que a afirmação E precisa ser verdadeira. Como uma mentira anula outra, temos que E é verdade se, e só se, uma quantidade par das pessoas mentiram. Assim, para calcular $\Pr(E)$, há três casos: (a) ninguém mentiu; (b) exatamente duas pessoas mentiram; (c) todas as pessoas mentiram.

O caso (a) acontece com probabilidade $(1/3)^4 = 1/81$. Para calcular a probabilidade de (b), primeiro devemos escolher quais, dentre as pessoas A, B, C, D, mentiram, o que pode ser feito de $\binom{4}{2} = 6$ maneiras. Agora, para cada uma dessas escolhas de mentirosos, a probabilidade correspondente é $(1/3)^2 \cdot (2/3)^2 = 4/81$. Assim, a probabilidade de que o caso (b) ocorra é $6 \cdot 4/81 = 24/81$. Por fim, a probabilidade do caso (c) é $(2/3)^4 = 16/81$. Isso nos dá

$$\Pr(E) = \frac{1}{81} + \frac{24}{81} + \frac{16}{81} = \frac{41}{81}.$$

Resta calcular $\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \cap E)$. Para tal, vamos verificar em quais dos casos listados acima A fala a verdade. No caso (a), isso acontece com probabilidade $1/81$, como antes. No caso (b), dado que A fala a verdade, a escolha dos dois mentirosos deve ser feita entre as pessoas B, C e D. Logo, há apenas $\binom{3}{2} = 3$ escolhas e a probabilidade desse caso é $3 \cdot (1/3)^2 \cdot (2/3)^2 = 3 \cdot 4/81 = 12/81$. Por fim, no caso (c), sabemos que todos mentem, logo A não fala a verdade. Então,

$$\Pr(\text{“}A \text{ falou a verdade”} \cap E) = \frac{1}{81} + \frac{12}{81} = \frac{13}{81}.$$

Por fim, a probabilidade pedida no enunciado é:

$$\begin{aligned}&\Pr(\text{“}A\text{ falou a verdade”} \mid E) = \\ &= \frac{\Pr(\text{“}A\text{ falou a verdade”} \cap E)}{\Pr(E)} \\ &= \frac{13/81}{41/81} = \frac{13}{41} \cong 31{,}7\%. \qquad \square\end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que essa aula seja apresentada em dois encontros de 50 minutos. Sugerimos, também, revisar o Módulo Probabilidade Condicional antes de iniciar a aula. Assumimos como pré-requisito algumas aulas do Módulo Princípios Básicos de Contagem, especialmente as definições de permutações com elementos repetidos e combinações; mas estes fatos são necessários apenas nas últimos três exemplos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.