**Material Teórico - Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas**

**Redução ao Primeiro Quadrante**

**Primeiro Ano do Ensino Médio**

**Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**19 de janeiro de 2019**

# 1 Redução ao Primeiro Quadrante

Nó módulo "Círculo Trigonométrico", também do primeiro ano, aprendemos que esse círculo é aquele de raio 1 com centro na origem, o ponto $O = (0{,}0)$, do plano cartesiano. Consideramos o ponto $A = (1{,}0)$ e, dado um comprimento $\beta$ de um arco, marcamos o ponto $P$ sobre o círculo trigonométrico tal que $\widehat{AP}$ mede $\beta$. Assim fazendo, definimos os números $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta$ de tal sorte que

$$P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta). \tag{1}$$

Note que, aqui, escrevemos simplesmente $\operatorname{sen}\beta$ no lugar de $\operatorname{sen}(\beta)$, apenas pelo fato de a primeira notação ser mais compacta. Ambas essas notações têm o mesmo significado, mas a primeira deve ser usada com cautela, especialmente em expressões longas, para não haver risco de ambiguidades.

Quando $0 < \beta < \pi/2$, podemos construir um triângulo retângulo com um ângulo interno de medida $\beta$ radianos e, portanto, com os outros dois ângulos internos medindo $\pi/2$ e $\pi/2 - \beta$ (lembre-se de que $\pi/2$ radianos corresponde a $90°$).

Conforme estudado no módulo "Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo: Seno, Cosseno e Tangente" do Nono Ano do EF, em um tal triângulo temos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos\beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}.$$

Ademais, se escolhermos tal triângulo de modo que a medida de sua hipotenusa seja igual a 1, teremos $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ como as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a $\beta$, respectivamente. A Figura 1, mostra como escolher tal triângulo fazendo com que sua hipotenusa coincida com um raio do círculo trigonométrico.

Contudo, quando $\beta$ *não* pertence ao intervalo aberto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, não existe triângulo retângulo com um ângulo interno de medida $\beta$ radianos. Neste caso, podemos usar a técnica de redução ao primeiro quadrante para calcular o seno, o cosseno e a tangente de $\beta$. Essa técnica já foi esboçada no módulo Círculo Trigonométrico, mas a repetiremos aqui adicionando mais detalhes e exemplos. A ideia é, a partir de $\beta$, obter um certo ângulo $\alpha$ entre 0 e $\pi/2$ e relacionar os valores de $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ com os de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

Lembre-se de que os eixos do plano cartesiano dividem o Círculo Trigonométrico em quatro partes. Cada parte é denominada um *quadrante* e, por convenção, os quadrantes são numerados de I até IV (um até quatro em algarismos romanos, respectivamente) em sentido anti-horário, sendo o primeiro quadrante aquele formado pelos pontos em que ambas as coordenadas são positivas (veja os numerais I, II, III, IV na Figura 1).

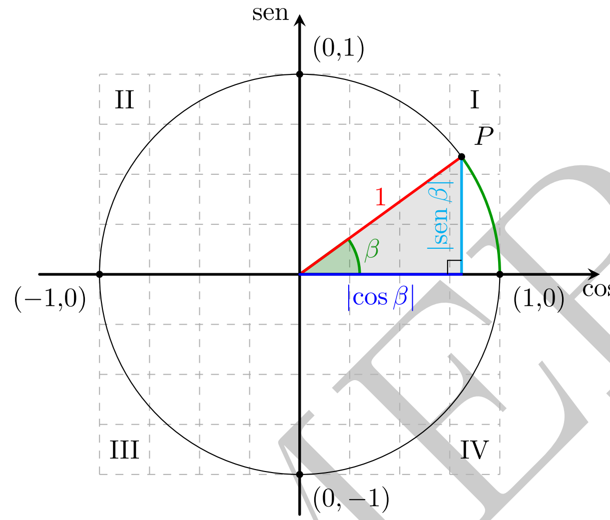


Figura 1: seno e cosseno no primeiro quadrante.

Sem perda da generalidade, assuma que $0 < \beta < 2\pi$. (Não sendo esse o caso, podemos substituir $\beta$ por sua menor determinação positiva, conforme estudado na primeira aula do módulo "Círculo Trigonométrico".) Como antes, assuma que $\beta = \widehat{AP}$ e vamos considerar separadamente os casos em que $P$ se encontra em cada um dos quatro quadrantes. Em cada caso, definiremos um ponto $Q$ e tomaremos $\alpha = \widehat{AQ}$. Com uma escolha adequada de $Q$, teremos

$$|\operatorname{sen}\beta| = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad |\cos\beta| = \cos\alpha.$$

Observe que podemos encontrar os sinais de $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ dependendo do quadrante de $P$.

## 1.1 Do segundo ao primeiro quadrante

A Figura 2 mostra um exemplo com $P$ no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \beta < \pi$. Veja que, neste caso, temos $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{sen}\beta > 0$. Denotando por $B$ o pé da perpendicular baixada de $P$ ao eixo $x$, temos

$$\overline{PB} = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\beta.$$

Vamos escolher o ponto $Q$ como sendo o simétrico de $P$ em relação ao eixo $y$ (veja a Figura 2); assim, como $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, temos $Q = (-\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Comparando as duas expressões para as coordenadas do ponto $Q$, obtemos

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos\alpha.$$

Agora, seja $B'$ o pé da perpendicular baixada de $Q$ ao eixo $x$ (observe novamente a Figura 2). A simetria entre $P$ e $Q$ em relação ao eixo $y$ assegura a simetria de $B$ e $B'$ em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos $OPB$ e $OQB'$ são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo, $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B'$. Por outro lado, $P\widehat{O}B = \pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = Q\widehat{O}B' = P\widehat{O}B = \pi - \beta.$$

Substituindo essa expressão para $\alpha$ nas expressões que relacionam $\operatorname{sen}\alpha$ com $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$ com $\cos\beta$, concluímos que

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\pi - \beta). \qquad (2)$$

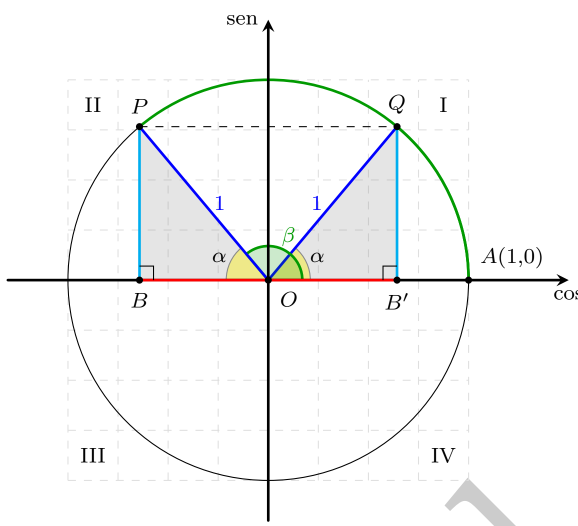



Figura 2: seno e cosseno no segundo quadrante.

**Observação 1.** *É possível mostrar que as equações em* (2) *são válidas para qualquer valor de* $\beta$ *(contudo, apenas no caso em* $\beta$ *está no segundo quadrante é que temos* $\pi - \beta$ *situado no primeiro quadrante).*

A partir das fórmulas (2) e levando em consideração a observação acima, temos também

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}{-\cos(\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(\pi - \beta),$$

para todo valor de $\beta$ tal que $\cos\beta \neq 0$.

## 1.2 Do terceiro ao primeiro quadrante

A Figura 3 mostra um exemplo com $P$ no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < \beta < 3\pi/2$. Assim sendo, temos $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{sen}\beta < 0$. Logo, para o ponto $B$ como antes (isto é, para $B$ sendo o pé da perpendicular baixada de $P$ ao eixo $x$), temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\beta.$$

Desta vez, vamos escolher $Q$ como sendo o simétrico de $P$ em relação à origem $O$ do plano cartesiano (veja a Figura 2). Em particular, $Q$ pertence ao primeiro quadrante e os pontos $P$, $O$ e $Q$ são colineares. Assim, como $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, temos que $Q = (-\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Agora, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também podemos escrever $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Comparando novamente as duas expressões acima para as coordenadas de $Q$, obtemos

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos\alpha.$$

Também como antes, seja $B'$ o pé da perpendicular de $Q$ traçada ao eixo $x$. Veja que $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B'$, pois estes são ângulos opostos pelos vértice. Por outro lado, $P\widehat{O}B = \beta - \pi$, de sorte que

$$\alpha = \widehat{AQ} = P\widehat{O}B = \beta - \pi.$$

Substituindo essa expressão para $\alpha$ nas relações entre $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$, $\cos\beta$, chegamos a

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\beta - \pi) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\beta - \pi). \qquad (3)$$

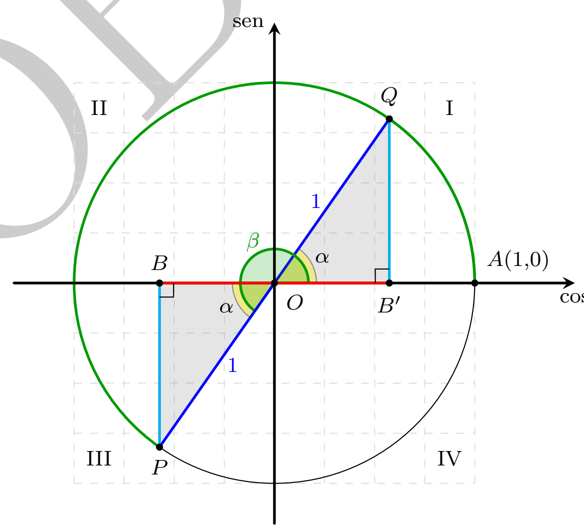



Figura 3: seno e cosseno no terceiro quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{-\operatorname{sen}(\beta - \pi)}{-\cos(\beta - \pi)} = \operatorname{tg}(\beta - \pi).$$

Uma vez que $\beta = \pi + \alpha$, isso também equivale a

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha).$$

**Observação 2.** *O argumento deste caso é essencialmente o mesmo do caso anterior. Porém, o fato de* $P$ *estar no terceiro quadrante faz com que os sinais de* $\operatorname{sen}\beta$ *e* $\cos\beta$ *sejam diferentes comparados ao caso anterior, assim como a relação entre* $\beta$ *e* $\alpha$ *é diferente.*

*Também é possível mostrar que as equações em* (3)*, assim como a relação entre* $\operatorname{tg}\alpha$ *e* $\operatorname{tg}\beta$ *são válidas para qualquer valor de* $\beta$ *(a última delas contanto que* $\cos\beta \neq 0$*. Mas, apenas no caso em* $\beta$ *está no terceiro quadrante, temos que* $\beta - \pi$ *está no primeiro quadrante.*

### 1.3 Do quarto ao primeiro quadrante

Como último caso, a Figura 4 mostra um exemplo com $P$ no quarto quadrante, isto é, com $3\pi/2 < \beta < 2\pi$. Veja que, desta feita, temos $\cos\beta > 0$ e $\operatorname{sen}\beta < 0$. Logo, definindo o ponto $B$ como antes, temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \cos\beta.$$

Escolhendo o ponto $Q$ como o simétrico de $P$ em relação ao eixo $x$ (veja a Figura 4), temos $Q$ situado no primeiro quadrante. Ainda pela simetria, juntamente com o fato de que $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, obtemos $Q = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$. Por outro lado, sendo $\alpha = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Assim, comparando as duas expressões para as coordenadas de $Q$, vem

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos\alpha.$$

Neste caso, o pé $B'$ da perpendicular baixada de $Q$ ao eixo $x$ coincide com o ponto $B$. Então, os triângulos $OPB$ e $OQB$ são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B$.

Por outro lado, $P\widehat{O}B = 2\pi - \beta$. Portanto,

$$\alpha = \widehat{AQ} = Q\widehat{O}B = P\widehat{O}B = 2\pi - \beta.$$

Concluímos, pois, que

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(2\pi - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos(2\pi - \beta). \qquad (4)$$

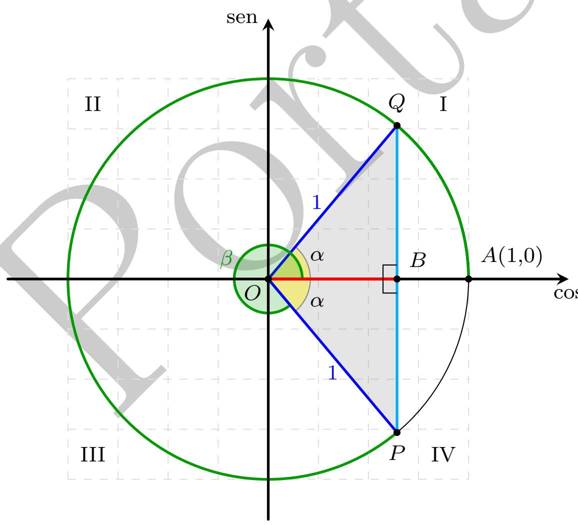



Figura 4: seno e cosseno no quarto quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - \beta)}{\cos(2\pi - \beta)} = -\operatorname{tg}(2\pi - \beta).$$

**Observação 3.** *Como nos outros casos, as equações em* (4) *também valem para qualquer arco* $\beta$ *(no caso da tagente, contanto que* $\cos\beta \neq 0$*. Contudo, o caso em que* $\beta$ *está no terceiro quadrante é interessante pois* $2\pi - \beta$ *está no primeiro quadrante.*

Antes de examinarmos alguns exercícios, cumpre traduzirmos as fórmulas obtidas nas subseções anteriores, de radianos para graus. Fazemos isto no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.** *Traduza de radianos para graus as relações* (2), (3) *e* (4) *obtidas nas subseções acima.*

**Solução.** Lembre-se de que $\pi$ radianos equivalem a $180°$.

Assim, para $\beta$ no segundo quadrante temos, em graus, $90° < \beta < 180°$. Ao reduzir ao primeiro quadrante, escolhemos $\alpha = 180° - \beta$, de modo que

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(180° - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(180° - \beta).$$

Quando $\beta$ está no terceiro quadrante, temos em graus que $180° < \beta < 270°$. Neste caso, $\alpha = \beta - 180°$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(\beta - 180°) \quad \text{e} \quad \cos\beta = -\cos(\beta - 180°).$$

Por fim, quando $\beta$ está no quarto quadrante, temos em graus que $270° < \beta < 360°$. Também, o arco $\alpha = 360° - \beta$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}(360° - \beta) \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos(360° - \beta).$$

□

## 2 Exercícios

Para os exercícios seguintes sugerimos que, antes de ler suas soluções, o leitor desenhe os ângulos envolvidos sobre o Círculo Trigonométrico e use as devidas simetrias, no lugar de simplesmente utilizar as fórmulas apresentadas na seção anterior. Abaixo, relembramos os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis.

| Ângulo (graus) | Ângulo (radianos) | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|---|
| $0°$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $30°$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $45°$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| $60°$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $90°$ | $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | $\nexists$ |

**Exemplo 5.** *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 120^\circ$ *e* $\cos 120^\circ$.

**Solução.** Veja que $120^\circ$ pertence ao segundo quadrante, pois $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$. Assim, de acordo com a Figura 2, ao reduzir $120^\circ$ para o primeiro quadrante, obtemos um ângulo de $60^\circ$. De acordo com a tabela anterior, $\operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\cos 60^\circ = 1/2$. Mas, como $\operatorname{sen} 120^\circ > 0$ e $\cos 120^\circ < 0$, temos que:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

**Exemplo 6.** *Calcule os valores de* $\operatorname{sen}(5\pi/6)$ *e* $\cos(5\pi/6)$.

**Solução.** Veja que $5\pi/6$ pertence ao segundo quadrante, pois está entre $\pi/2$ e $\pi$. Como no problema anterior, observando a Figura 2, reduzimos esse arco ao arco do primeiro quadrante $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Por outro lado, sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Então, como $\operatorname{sen}(5\pi/6) > 0$ e $\cos(5\pi/6) < 0$, temos:

$$\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$

**Exemplo 7.** *Qual o valor de* $\operatorname{tg}(5\pi/4)$*?*

**Solução.** Veja que $\pi < 5\pi/4 < 3\pi/2$, logo, $5\pi/4$ pertence ao terceiro quadrante; então, $\operatorname{tg}(5\pi/4) > 0$. De acordo com Figura 3, ao reduzir $5\pi/4$ ao primeiro quadrante, obtemos $\alpha = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$. Logo,

$$\operatorname{tg}(5\pi/4) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1. \qquad \square$$

**Exemplo 8.** *Encontre o ângulo* $\alpha$ *tal que* $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$,

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen} 216^\circ \quad e \quad \cos\alpha = \cos 216^\circ.$$

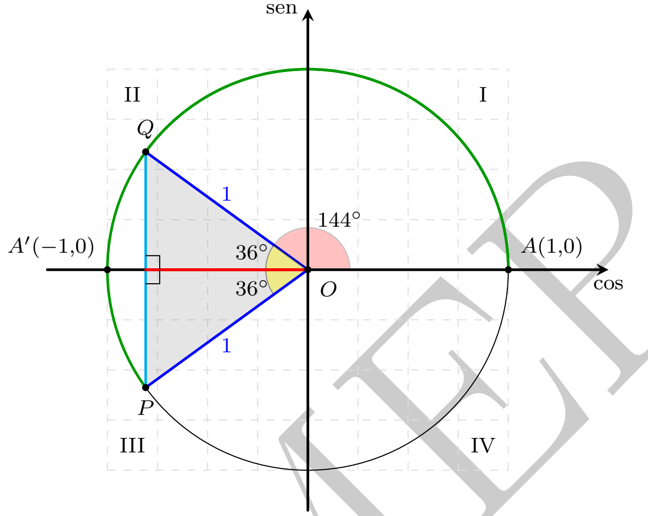
**Solução.** Essa pergunta é diferente das anteriores, mas podemos atacá-la de maneira similar. Primeiro, vamos identificar o quadrante de $216^\circ$. Como $180^\circ < 216^\circ < 270^\circ$, temos $\operatorname{sen}(216) < 0$ e $\cos(216) < 0$. Então, as igualdades do enunciado garantem que $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$ e $\cos(\alpha) < 0$. Isso, juntamente com $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, indica que $\alpha$ pertence ao segundo quadrante.

Sejam $A = (1{,}0)$, $A' = (-1{,}0)$ e $P$ o ponto do Círculo Trigonométrico tal que $A\widehat{O}P = 216^\circ$ (com o arco $\widehat{AP}$ medido no sentido anti-horário, de $A$ para $P$). Agora, observe que a redução de $216^\circ$ ao primeiro quadrante é $216^\circ - 180^\circ = 36^\circ$.

A fim de obter o ponto do segundo quadrante correspondente a $\alpha$, tomemos $Q$ como o simétrico de $P$ em relação ao eixo $x$ (veja a figura a seguir). Temos que $Q\widehat{O}A' = A'\widehat{O}P = 36^\circ$. Daí, $A\widehat{O}Q = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Por fim, veja que $\alpha = 144^\circ$ satisfaz as condições do enunciado, pois

$$\operatorname{sen} 144^\circ = -\operatorname{sen} 216^\circ \quad \text{e} \quad \cos 144^\circ = \cos 216^\circ.$$




$\square$

**Exemplo 9.** *Se* $R = \operatorname{sen} 130^\circ + \cos 130^\circ$. *Decida, com justificativa, se* $R$ *é positivo, negativo ou igual a zero.*

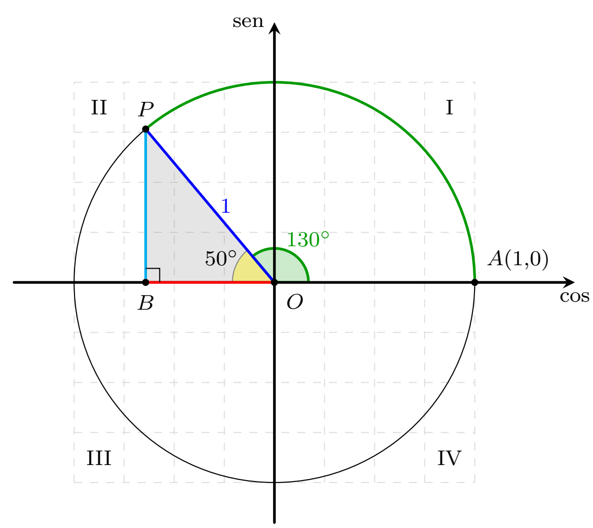
**Solução.** A figura seguinte nos mostra um ângulo de $130^\circ$, juntamente com o arco correspondente sobre o Círculo Trigonométrico. Veja que $\operatorname{sen} 130^\circ > 0$ enquanto que $\cos 130^\circ < 0$. Se $B$ é o pé da perpendicular de $P$ traçada ao eixo $x$, temos

$$\overline{PB} = \operatorname{sen} 130^\circ \quad \text{e} \quad \overline{BO} = -\cos 130^\circ.$$

Logo,

$$R = \overline{PB} - \overline{BO}.$$

No triângulo $PBO$, temos que $P\widehat{O}B = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, de sorte que $B\widehat{P}O = 40^\circ$. Como o menor lado de um triângulo é o oposto ao seu menor ângulo, concluímos que $\overline{BO} < \overline{PB}$. Logo, $R > 0$.




$\square$

**Exemplo 10.** *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 1410°$, $\cos 1410°$ *e* $\operatorname{tg} 1410°$.

**Solução.** Neste caso, vamos primeiro calcular a menor determinação positiva de 1410°. Para isso, começamos dividindo 1410 por 360, obtendo

$$1410 = 3 \cdot 360 + 330.$$

Logo, 1410° e 330° são congruentes, de modo que

$$\operatorname{sen} 1410° = \operatorname{sen} 330° \quad \text{e} \quad \cos 1410° = \cos 330°.$$

Agora, basta reduzir 330° ao primeiro quadrante. Observando que $270° < 330° < 360°$, vemos que o arco correspondente a 330° pertence ao quarto quadrante. Então, revisitando a Figura 4, vemos que devemos tomar $\alpha = 360° - 330° = 30°$. Dessa forma, segue que

$$\operatorname{sen} 1410° = \operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 1410° = \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 1410° = \operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \square$$

**Exemplo 11.** *Lembre-se de que arcos complementares são aqueles cuja soma é igual a* $\pi/2$ *e suplementares são aqueles cuja soma é igual a* $\pi$. *Sabendo que* $\alpha$ *e* $\beta$ *são complementares e que* $\beta$ *e* $\gamma$ *são suplementares, com* $\cos \gamma \neq 0$, *calcule a razão entre* $\operatorname{sen} \alpha$ *e* $\cos \gamma$.

**Solução.** Como $\alpha$ e $\beta$ são complementares, temos que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. No Módulo "Círculo Trigonométrico" vimos que isso implica que $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$.

Agora, $\beta$ e $\gamma$ satisfazem $\beta + \gamma = \pi$, de sorte que (2) fornece $\cos \beta = -\cos \gamma$. Então, $\operatorname{sen} \alpha = -\cos \gamma$ e a razão pedida é igual a

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -1. \qquad \square$$

**Exemplo 12.** *Sabendo que* $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$ *e que* $\alpha$ *pertence ao segundo quadrante, calcule os valores de* $\cos \alpha$ *e* $\operatorname{tg} \alpha$.

**Solução.** Recordemos que, pela relação fundamental, tem-se

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Logo,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \implies \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

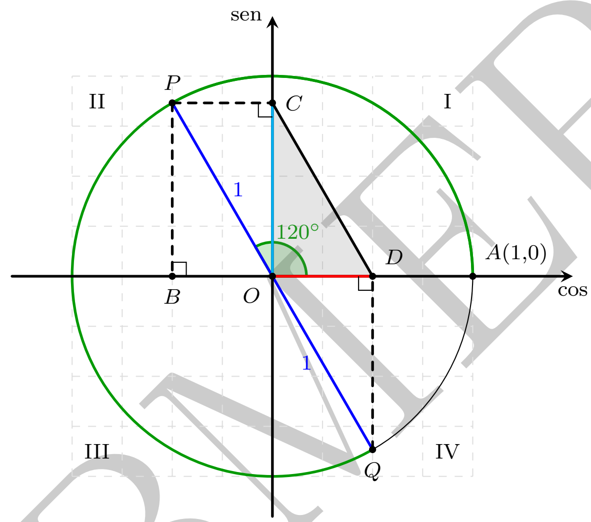
Como $\alpha$ pertence ao segundo quadrante, temos $\cos \alpha < 0$. Assim,

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Por fim, temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}. \qquad \square$$

**Exemplo 13.** *Na figura a seguir, temos um círculo de raio 1, com centro em* $O$, *e sabemos que os pontos* $P$, $O$ *e* $Q$ *são colineares. Sabendo que o arco trigonométrico* $\widehat{AP}$ *mede* $2\pi/3$ *radianos, calcule a área do triângulo* $OCD$.




**Solução 1.** Inicialmente, observe que $2\pi/3$ radianos correspondem a 120°. Então, temos

$$\overline{OC} = |\operatorname{sen}(120°)| \quad \text{e} \quad \overline{OB} = |\cos(120°)|.$$

Conforme calculado no Exemplo 5, tais igualdades fornecem

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \frac{1}{2}.$$

Como $P$, $O$ e $Q$ são colineares, temos $P\widehat{O}B = D\widehat{O}Q$, pois são opostos pelo vértice. Consequentemente, seus complementos também são iguais, isto é, $B\widehat{P}O = D\widehat{Q}O$. Mas, como $\overline{PO} = \overline{QO}$, segue que os triângulos $OPB$ e $QOD$ são congruentes, pelo caso "ângulo, lado, ângulo". Logo, $\overline{OD} = \overline{OB}$.

Assim, a área do triângulo $OCD$ é igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \qquad \square$$

**Solução 2.** Temos $C\widehat{O}P = 120° - 90° = 30°$. Como $\overline{OP} = 1$, observando o triângulo $COP$ temos

$$\overline{PC} = \operatorname{sen} 30° \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \cos 30°.$$

Logo,

$$\overline{PC} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como na solução anterior, concluímos que os triângulos $COP$ e $DOQ$ são congruentes. Então, $\overline{OD} = \overline{PC}$ e podemos calcular a área de $OCD$ da mesma forma que na primeira solução. $\square$

**Exemplo 14.** *Sabendo que $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são os ângulos de um triângulo não retângulo, calcule o valor numérico da expressão*

$$R = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\gamma} + \operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$$

**Solução.** Temos que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Logo,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\pi-\gamma) = \operatorname{sen}\gamma$$

e, daí,

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} = 1.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma) = \operatorname{tg}(\pi+\gamma) = \operatorname{tg}\gamma,$$

ao passo que

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi-\gamma)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\gamma}.$$

(Note que os cálculos acima têm sentido, uma vez que $\gamma \neq 90^\circ \Rightarrow \cos\gamma \neq 0$.) Combinando os dois últimos resultados, temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+2\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{-\operatorname{tg}\gamma} = -1.$$

Então, a expressão do enunciado vale

$$R = 1 - 1 = 0. \qquad \square$$

## Dicas para o Professor

Este módulo tem como pré-requisitos o bom entendimento das noções geométricas de simetria (em relação a uma reta ou a um ponto) e conhecimentos básicos sobre congruência de triângulos. É imprescindível fazer várias figuras e exemplos para que a redução ao primeiro quadrante se torne natural. Observe que as escolhas do ângulo $\alpha$ em função de $\beta$, feitas na Seção 1, são consequências naturais das simetrias encontradas. Por isso, melhor do que memorizar as relações (2), (3) e (4) é sempre tentar visualizá-las. De toda forma, após usá-las várias vezes, elas acabarão sendo memorizadas.

Recomendamos que o professor aborde o conteúdo desta aula em dois ou três encontros de 50 minutos. A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.