Material Teórico - Módulo Cardinalidade de Conjuntos

Conjuntos Não Enumeráveis - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Antonio Caminha M. Neto

10 de Outubro de 2024

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Conforme comentamos ao final do material, há duas possibilidades mutuamente excludentes:

1. α é raiz de algum polinômio não nulo de coeficientes racionais.

2. α não é raiz de nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais.

No primeiro caso, dizemos que α é um **número algébrico**; no segundo, que α é um **número transcendente**.

Observe que o conjunto $\mathbb{A}$ dos números reais algébricos inclui o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais; realmente, para $r \in \mathbb{Q}$, temos que r é raiz do polinômio não nulo $x - r$, o qual tem coeficientes racionais.

Entretanto, $\mathbb{A}$ também contém muitos números irracionais que encontramos comumente na escola. Vejamos três exemplos genéricos.

Exemplo 1. Toda raiz n-ésima de um racional positivo. Realmente, dados $n > 1$ inteiro e $r > 0$ racional, o número $\sqrt[n]{r}$ é raiz do polinômio não nulo $x^n - r$, o qual tem coeficientes racionais.

Exemplo 2. Toda raiz n-ésima de um número algébrico positivo continua algébrico. Realmente, dados $n > 1$ inteiro e $\alpha > 0$ algébrico, seja

$$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

um polinômio não nulo e de coeficientes racionais tal que $f(\alpha) = 0$. Se

$$g(x) = x^{mn} + a_{m-1}x^{(m-1)n} + \ldots + a_1x^n + a_0,$$

então g também é um polinômio não nulo e de coeficientes racionais, e é imediato verificar que $\sqrt[n]{\alpha}$ é raiz de g, uma vez que $\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha$.

Exemplo 3. Os números $\cos \frac{2\pi}{n}$ e $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$, também são algébricos.

Por exemplo, para $n = 18$, temos

$$\cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{18}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

como

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, fazendo $\theta = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$, obtemos

$$4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{2},$$

logo, $\cos\frac{\pi}{9}$ é raiz do polinômio não nulo e de coeficientes racionais $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

Para o caso geral, veja o capítulo 3 da referência [2].

Talvez um tanto surpreendentemente, prova-se o seguinte

Teorema 4. *O conjunto $\mathbb{A}$ dos números reais algébricos é* fechado *para as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Mais precisamente, se α e β são algébricos, com $\beta \neq 0$, então $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ também são algébricos.*

A título de exemplo, veja que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são algébricos, logo, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ também o é. Realmente, pondo $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, calculamos:

$$\begin{aligned}
a = \sqrt{2} + \sqrt{3} &\Rightarrow a - \sqrt{2} = \sqrt{3} \\
&\Rightarrow (a - \sqrt{2})^2 = 3 \\
&\Rightarrow a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 = 3 \\
&\Rightarrow a^2 - 1 = 2\sqrt{2}a \\
&\Rightarrow (a^2 - 1)^2 = 8a^2 \\
&\Rightarrow a^4 - 2a^2 + 1 = 8a^2 \\
&\Rightarrow a^4 - 10a^2 + 1 = 0;
\end{aligned}$$

portanto, $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz do polinômio de coeficientes racionais $x^4 - 10x^2 + 1$, logo, é algébrico.

Uma demonstração autocontida do Teorema 4 pode ser encontrada no capítulo 8 da referência [2].

Aqui, é mais importante perceber que ele garante, juntamente com os exemplos anteriores, que números muito "*complicados*" são algébricos. Por exemplo, páre por um momento e, utilizando a discussão feita até aqui, justifique o fato de que os números

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}+\sqrt[7]{7}+\sqrt[11]{11}$$

e

$$\sqrt[5]{2+\sqrt[3]{7+18\sqrt[10]{2024}}}$$

são algébricos.

Neste material, nosso objetivo inicial é apresentar uma demonstração completa para o fato de que o conjunto $\mathbb{A}$ dos números reais algébricos é enumerável. Dada a profusão de exemplos de números algébricos que fabricamos acima, essa afirmação pode, a princípio, parecer um tanto surpreendente.

No que segue, para um polinômio não nulo f de coeficientes reais, denotamos por $\mathcal{R}_f$ o conjunto das raízes reais de f. Precisaremos do seguinte resultado auxiliar, devido ao matemático francês dos séculos Joseph Louis Lagrange.

Lema 5 (Lagrange). *Um polinômio de coeficientes reais e grau n tem no máximo n raízes reais.*

Prova. Façamos indução sobre $n \geq 1$.

O caso $n = 1$ imediato: se $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $-\frac{b}{a}$ é a única raiz real de f.

Suponha, por hipótese de indução, que, quando $n = k \geq 2$, todo polinômio de coeficientes reais e grau $k-1$ tenha no máximo $k-1$ raízes reais.

Seja $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de coeficientes reais e grau k. Se f não tiver raízes reais, nada há a fazer. Do contrário, seja α uma raiz real de f, de modo que

$$a_k\alpha^k + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) \\ &= (a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0) - (a_k \alpha^k + \ldots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= a_k(x^k - \alpha^k) + \ldots + a_2(x^2 - \alpha^2) + a_1(x - \alpha). \end{aligned}$$

Como

$$x^m - \alpha^m = (x-\alpha)(\underbrace{x^{m-1} + x^{m-2}\alpha + \ldots + x\alpha^{m-2} + \alpha^{m-1}}_{:=q_m(x),\ \text{de grau } m-1}),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= a_k(x-\alpha)q_k(x) + \ldots + a_2(x-\alpha)q_2(x) + a_1(x-\alpha) \\ &= (x-\alpha)\big(a_k q_k(x) + \ldots + a_2 q_2(x) + a_1\big) \\ &= (x-\alpha)g(x), \end{aligned}$$

em que

$$g(x) := a_k q_k(x) + \ldots + a_2 q_2(x) + a_1$$

é um polinômio de coeficientes reais e grau $k-1$.

Por hipótese de indução, g tem no máximo $k-1$ raízes reais, isto é,

$$|\mathcal{R}_g| \leq k - 1.$$

Por outro lado, para $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, a igualdade $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ garante que

$$f(\beta) = 0 \Leftrightarrow (\beta - \alpha)g(\beta) \Leftrightarrow g(\beta) = 0;$$

assim,

$$\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_g \cup \{\alpha\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_f| &= |\mathcal{R}_g \cup \{\alpha\}| \leq |\mathcal{R}_g| + |\{\alpha\}| \\ &= |\mathcal{R}_g| + 1 \leq (k-1) + 1 = k, \end{aligned}$$

confome desejado. $\square$

Teorema 6. *O conjunto $\mathbb{A}$ dos números reais algébricos é enumerável.*

Prova. Para $n \in \mathbb{N}$, seja

$$A_n = \{\alpha \in \mathbb{A}; \alpha \text{ é raiz de um polinômio de, coeficientes racionais e grau } n\}.$$

Claramente, temos

$$\mathbb{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots .$$

Portanto, o Teorema 6 do material "Conjuntos Enumeráveis - Parte II" da aula "Conjuntos Enumeráveis" garante que, a fim de mostrar que $\mathbb{A}$ é enumerável, basta mostrar que A_n é enumerável, para todo $n \in \mathbb{N}$ (note que A_n é infinito, uma vez que contém todos os números $\sqrt[n]{r}$, com $r > 0$ racional).

Para mostrar que A_n é enumerável recorde que já mostramos (no Teorema 11 do material citado no parágrafo anterior) que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável. Portanto, aplicando várias vezes o Corolário 9 desse mesmo material, temos que

$$\mathbb{Q}^* \times \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{n \text{ fatores}}$$

também é enumerável.

Agora, seja

$$P_n = \{\text{polinômios } p, \text{ de grau, } n \text{ e coeficientes racionais}\}.$$

Um polinômio típico p em P_n é da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Q}$ e $a_n \neq 0$. Então, a aplicação

$$F : \mathcal{P}_n \longmapsto \mathbb{Q}^* \times \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{n \text{ fatores}},$$

dada por

$$F(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0),$$

é claramente uma bijeção, de forma que $\mathcal{P}_n$ também é enumerável.

Lembrando que $\mathcal{R}_f$ denota o conjunto das raízes reais do polinômio f e escrevendo

$$\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\},$$

é imediato a partir das definições de A_n e $\mathcal{P}_n$ que

$$A_n = \mathcal{R}_{p_1} \cup \mathcal{R}_{p_2} \cup \mathcal{R}_{p_3} \cup \ldots.$$

Pelo lema que antecede o teorema, cada conjunto $\mathcal{R}_{p_i}$ é finito, com no máximo n elementos. Então, invocando novamente o Teorema 6 do material "Conjuntos Enumeráveis - Parte II" da aula "Conjuntos Enumeráveis", concluímos que a união dos mesmos, isto é, o conjunto A_n, é enumerável. $\square$

No material anterior, vimos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável. Como a união finita de conjuntos enumeráveis também é enumerável, se $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$ fosse enumerável, teríamos que

$$\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}\big)$$

deveria ser enumerável, o que é um absurdo. Esse argumento prova o seguinte

Corolário 7. *O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ dos números reais transcendentes é não enumerável.*

Em particular, segue do corolário anterior que *existem infinitos* números transcendentes.

Em verdade, uma vez que $\mathbb{A}$ é enumerável e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ é não enumerável, uma maneira *intuitiva* de pensar é que *a maioria dos números reais é transcendente.* Isso pode parecer um tanto insatisfatório, na medida que gostaríamos, de fato, de poder *exibir* alguns números transcendentes.

Os dois resultados a seguir, cujas demonstrações estão bem além dessas notas, respondem a esse anseio em dois casos famosos.

Teorema 8 (Hermite[1]). *O número e, a base dos logaritmos naturais, é transcendente.*

Teorema 9 (Lindemann[2]). *O número π, a área de um disco de raio 1, é transcendente.*

Em que pese a discussão acima, ainda páira no ar uma pergunta natural: *é possível exibir um exemplo mais simples de número transcendente*? De fato, o primeiro número real que se provou ser transcendente foi o **número de Liouville**[3],

$$0,110001000000000000000000100\ldots = \sum_{n\geq 1} 10^{-n!},$$

com algarismos 1 nas posições $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ... e zeros nas demais posições.

A demonstração da irracionalidade do número de Liouville é bem mais acessível que as demonstrações das transcendências de e e π, requerendo somente alguns fatos simples sobre polinômios e uma relativa familiaridade com a teoria da convergência de *séries de números reais*. Remetemos o leitor interessado ao capítulo 8 da referência [2].

Dicas para o Professor

Este material foi parcialmente extraído da referência [2], a qual remetemos o leitor para mais detalhes. Para uma discussão autocontida da teoria de convergência de séries, sugerimos [1].

As demonstrações das transcendências de e e π são acessíveis a um estudante que tenha cursado as disciplinas usuais de Cálculo Diferencial e Integral I e II (alternativamente, veja os materiais do curso "*Introdução ao Cálculo*", aqui no Portal). Uma exposição detalhada pode ser encontrada na referência [3].

[1] Charles Hermite, matemático francês do século XIX.
[2] Carl Louis Lindemann, matemático alemão do século XIX.
[3] Joseph Liouville, matemático francês do século XIX.

Dois encontros de 50 minutos devem ser suficientes para expor e discutir os conteúdos deste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume* 3*, Introdução à Análise*. Terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2022.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume* 6*, Polinômios*. Terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2024.

3. D. G. de Figueiredo. *Números Irracionais e Transcendentes*. Terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2011.