Material Teórico - Módulo de Frações como Porcentagem e Probabilidade

Frações como Porcentagem – Parte 1

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autores: Prof. Francisco Bruno Holanda e Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

26 de abril de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

No módulo sobre frações, aprendemos que uma mesma fração pode ser representada, como uma razão entre numerador e denominador, de várias maneiras distintas. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{3}{6}$ e a $\frac{5}{10}$; neste caso, dizemos que quaisquer duas frações escolhidas dentre $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são **equivalentes**.

A equivalência $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ é especialmente importante. Você consegue perceber o porquê? O segredo está no seu denominador, que é uma **potência de 10** (no caso, $10^1 = 10$). Nesta aula, veremos como as frações com denominadores desse tipo são a chave para compreendermos os *números decimais*.

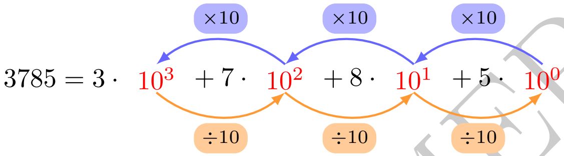
2 Representação decimal

Inicialmente, vamos considerar o número 3785 (três mil setecentos e oitenta e cinco). Esta é a sua *representação na base decimal*, em que cada algarismo corresponde à quantidade de potências de dez de ordem igual à posição do algarismo (da direita para a esquerda). De outro modo, podemos escrever

$$3785 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

De maneira análoga, todos os números naturais são escritos utilizando suas representações decimais. Mas, e quanto às frações que não são naturais, como, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{7}$? Eles também possuem algum tipo de *representação decimal*?

A resposta à pergunta do parágrafo anterior é *sim*. Mais precisamente, para entender como obter uma representação decimal para frações, tomemos como exemplo o número 3785; fazemos uso do seguinte raciocínio: as potências de 10 que utilizamos para representar esse número foram $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ e $10^3 = 1000$. O algarismo mais à direita (o algarismo 5) conta a quantidade de potências de 10 de ordem zero. O próximo algarismo (o 8), conta a quantidade de potências de 10 de ordem um, que é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, que era de ordem zero. O terceiro algarismo (o 7), conta a quantidade de potências de 10 de ordem dois, que, novamente, é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, de ordem um. Finalmente, o quarto e último algarismo (o algarismo 3) conta a quantidade de potências de 10 de ordem três, que é uma ordem de grandeza a mais do que a da potência anterior, que era de ordem dois. A figura a seguir resume como a mudança de uma ordem de grandeza para a outra afeta as potências de 10 utilizadas:



Observe que, dada uma potência de 10, para obtermos a potência de 10 de ordem imediatamente superior, devemos multiplicá-la por 10. Analogamente, para obtermos a potência de 10 de ordem imediatamente inferior, devemos dividir a potência original por 10.

Quando acrescentamos 60000, isto é, seis potências de 10 de ordem quatro, ao número 3785, isso se reflete na representação decimal pelo acréscimo de um novo algarismo (no caso, o algarismo 6) *à esquerda* do algarismo 3, de forma que escrevemos 63785 para representar o novo número. Em símbolos, temos

$$6 \times 10^4 + 3785 = 63785.$$

Conforme observamos no parágrafo anterior, veja que 10^4 é dez vezes maior do que 10^3, que é a maior potência utilizada no número 3785. Por outro lado, se somarmos $\frac{4}{10}$ ao número 3785, de forma que passemos a ter o número

$$3785 + \frac{4}{10} = 3785 + 4 \times \frac{1}{10}, \qquad (1)$$

e quisermos representar esse novo número por algum tipo de "*representação decimal*", então, graças ao raciocínio descrito até aqui, somos naturalmente levados a representá-lo colocando um algarismo 4, *à direita* de 3785. Mas, para não confundir a representação decimal do número em (1) com a do número $3785 + \frac{4}{10}$, colocamos uma *vírgula* separando os algarismos 5 e 4. Em símbolos, representamos $3785 + \frac{4}{10}$ escrevendo

$$3785{,}4.$$

Veja, então, que *a vírgula tem o efeito de nos fazer recordar que* $\frac{1}{10}$ *é dez vezes menor do que* $10^0 = 1$, que é a menor potência de 10 utilizada na representação decimal do número 3785. Observe também que, como

$$3785 + \frac{4}{10} = 3785{,}4,$$

somos naturalmente levados a escrever

$$\frac{4}{10} = 0{,}4.$$

De outra forma, a vírgula faz o papel de marcador, informando onde está o algarismo que representa a quantidade de potências de dez de ordem zero. Assim, argumentando por analogia em relação à situação descrita acima, temos

$$0{,}68 = 6 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10^2} = \frac{68}{100}$$

e

$$0{,}349 = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10^2} + 9 \times \frac{1}{10^3} = \frac{349}{1000}.$$

Podemos, também, fazer o caminho inverso, isto é, começar com uma fração que possua uma fração equivalente com denominador igual a uma potência de 10 e, a partir de tal fração equivalente, obter uma representação decimal para a fração original. Vejamos dois exemplos nesse sentido:

Exemplo 1. *Ache as representações decimais das frações* $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{4}$ *e* $\frac{9}{25}$ *utilizando frações equivalentes a elas e cujos denominadores sejam potências de* 10.

Solução. Para achar uma fração equivalente a $\frac{7}{2}$ e cujo denominador seja uma potência de 10, é suficiente multiplicar seus termos por 5. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

Em relação à fração $\frac{3}{4}$, como seu denominador $4 = 2^2$ tem dois fatores 2, devemos multiplicá-lo por $25 = 5^2$ para obter uma potência de 10 (no caso, 100). Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

Da mesma forma,

$$\frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = \frac{36}{100} = 0{,}36.$$

$\square$

Mais geralmente, temos a seguinte

Observação 2. Para que uma fração (em forma irredutível) possa ser escrita como uma fração decimal, o seu denominador deve conter apenas os fatores primos 2 e 5. Isso acontece porque qualquer potência de 10 é formada apenas por fatores 2 e 5 (na mesma quantidade). De fato, temos

$$10^n = 2^n \times 5^n.$$

Assim, se o denominador de uma fração em sua forma reduzida for $2^a \times 5^b$, para transformá-lo numa potência de 10, precisamos igualar os expoentes:

- Se tivermos mais fatores 2 do que 5, multiplicamos numerador e denominador pela potência de 5 que falta.

- Se tivermos mais fatores 5 do que 2, multiplicamos numerador e denominador pela potência de 2 que falta.

Por exemplo, no caso de $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$, temos dois fatores 2. Para chegar a 100 (10^2), precisamos de dois fatores 5. Por isso, multiplicamos por $5^2 = 25$.

Exemplo 3 (OBM). *Qual é o primeiro algarismo não nulo, após a vírgula, na representação decimal do número $\frac{1}{5^{12}}$?*

Solução. De acordo com a observação anterior (que, no final das contas, resume-se a utiliza o mesmo raciocínio desenvolvido na solução do exemplo anterior), vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por $2^{12} = 4096$. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{1}{5^{12}} = \frac{1 \times 2^{12}}{5^{12} \times 2^{12}} = \frac{4096}{10^{12}} = 0{,}00000004096.$$

Portanto, o primeiro algarismo não nulo após a vírgula é igual a 4. $\square$

3 Multiplicação e divisão por potências de 10

Nos primeiros anos da escola aprendemos que, ao multiplicar um número natural por 10, o resultado é obtido acrescentando-se um zero à direita do número original. Por exemplo, $7298 \times 10 = 72980$.

De forma análoga, quando multiplicamos um número decimal por 10, ou por potências maiores de 10 ($100, 1000$, etc.), o resultado é obtido *deslocando-se a vírgula para a direita*. A quantidade de casas que a vírgula é deslocada é igual ao número de zeros da potência de 10.

Exemplo 4. *Efetue as multiplicações:*

(a) $895{,}32 \times 10$.

(b) $104{,}014 \times 100$.

(c) $1{,}2 \times 1000$.

Solução. A justificativa para a regra de deslocar a vírgula reside na alteração da ordem de grandeza de cada algarismo. Veja o caso (a): o número 895,32 pode ser escrito como

$$895{,}32 = 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10^2};$$

multiplicando-o por 10 e aplicando a propriedade distributiva, temos

$$\begin{aligned}895{,}32 \times 10 &= 10 \times \Bigg(8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times \frac{1}{10}\\ &\qquad +2 \times \frac{1}{10^2}\Bigg)\\ &= 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0\\ &\qquad + 2 \times \frac{1}{10}\\ &= 8953{,}2.\end{aligned}$$

Note que cada algarismo subiu uma posição na escala decimal (unidade virou dezena, dezena virou centena, e assim por diante), resultando no deslocamento da vírgula.

Utilizando o mesmo raciocínio para os demais itens, obtemos:

(b) $104{,}014 \times 100 = 10401{,}4$ (aumento de duas ordens de grandeza).

(c) $1{,}2 \times 1000 = 1200$ (aumento de três ordens de grandeza). □

De modo análogo, quando dividimos um número decimal por uma potência de 10, o resultado é obtido *deslocando-se a vírgula para a esquerda.*

Exemplo 5. *Efetue as divisões:*

(*a*) $159{,}23 \div 10$.

(*b*) $43{,}4 \div 100$.

(*c*) $7 \div 1000$.

Solução. Dividir por 10 equivale a multiplicar por $\frac{1}{10}$, o que reduz a ordem de grandeza de cada algarismo. No item (a), temos

$$159{,}23 \div 10 = \frac{1}{10} \cdot \left(1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10^2}\right),$$

de maneira que

$$\begin{aligned} 159{,}23 \div 10 &= 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 9 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10^2} \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{10^3} \\ &= 15{,}923. \end{aligned}$$

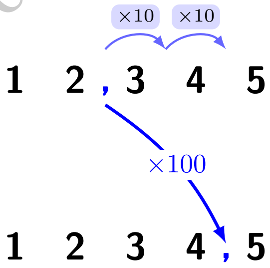
Seguimos o mesmo raciocínio para os demais itens:

(b) $43{,}4 \div 100 = 0{,}434$ (redução de duas ordens de grandeza).

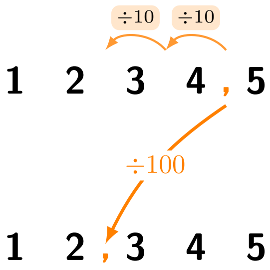
(c) $7 \div 1000 = 0{,}007$ (redução de três ordens de grandeza). $\square$

Os diagramas abaixo ilustram como funciona o deslocamento da vírgula na multiplicação e divisão por potências de 10.

Multiplicação por 100 $\longrightarrow$ Direita



Divisão por 100 ⟶ Esquerda



4 Algoritmo da divisão e representação decimal

Outra forma de descobrir a forma decimal de uma fração é através do algoritmo da divisão.

Exemplo 6. *Encontre a representação decimal da fração* $\frac{23}{25}$.

Solução. Efetuamos a divisão de 23 por 25:

$$
\begin{array}{r|l}
230 & 25 \\ \cline{2-2}
-225 & 0{,}92 \\ \cline{1-1}
050 & \\
-50 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

A seguir, descrevemos os passos utilizados no algoritmo acima.

1. Como não podemos efetuar a divisão inteira de 23 por 25 (o quociente seria 0), acrescentamos um 0 à direita do resto 23 e, ao mesmo tempo, colocamos uma vírgula no quociente (0,).

2. Dividimos 230 por 25. O quociente é 9 ($25 \times 9 = 225$) e sobra 5.

3. Acrescentamos um 0 ao resto 5, transformando-o em 50.

4. Executamos a divisão inteira de 50 por 25. O quociente é 2 e o resto é 0. O processo para aqui.

Logo, $\frac{23}{25} = 0{,}92$. $\square$

Por que esses passos funcionam?

A regra de "acrescentar um zero ao resto e colocar a vírgula no quociente" funciona porque estamos mudando a unidade de medida para ordens menores. Quando não conseguimos dividir unidades inteiras, nós as transformamos:

- Se sobrarem 23 unidades, elas equivalem a 230 **décimos**. Por isso, o resultado (9) ocupa a primeira casa após a vírgula.

- Se sobrarem 5 décimos, eles equivalem a 50 **centésimos**. O resultado (2) ocupa a segunda casa decimal.

O zero que acrescentamos nada mais é do que a multiplicação por 10 necessária para descer uma ordem no sistema decimal.

Exemplo 7. *Encontre a representação decimal da fração* $\frac{7}{8}$.

Solução. Aplicando o algoritmo da divisão:

$$
\begin{array}{r|l}
7000 & 8 \\ \cline{2-2}
-64 & 0{,}875 \\ \cline{1-1}
060 & \\
-56 & \\ \cline{1-1}
040 & \\
-40 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Portanto, temos $\frac{7}{8} = 0{,}875$. $\square$

Dicas para o Professor

A representação em base decimal está presente em inúmeras situações do cotidiano, o que torna esta aula uma excelente oportunidade para engajar a turma e mostrar uma faceta da utilidade da Matemática no dia-a-dia. Recomendamos que o professor utilize essa familiaridade a favor do aprendizado, construindo os conceitos de forma progressiva. Explore o algoritmo da divisão fazendo as contas passo a passo na lousa, junto com a turma. Como alguns alunos podem esquecer de colocar a vírgula no quociente ou ter dúvidas sobre quando acrescentar um zero a mais, uma dica importante é fazer dessas etapas momentos de participação ativa da turma.

Adicionalmente, o professor pode mencionar curiosidades sobre outras representações numéricas (como a representação binária, amplamente utilizada em Computação, ou o sistema romano) para evidenciar aos alunos como a representação decimal facilitou a nossa vida e se tornou a ferramenta mais prática para as operações aritméticas.