

# Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

## Teorema de Tales - Parte II

Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes de Oliveira  
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto



# 1 O Teorema da bissetriz interna

Nessa segunda parte da aula sobre o Teorema de Tales, aplicamo-lo ao estudo dos teoremas da bissetriz interna e externa relativas a um ângulo de um triângulo dado. Começamos analisando o *Teorema da Bissetriz Interna*, que trata da razão em que o pé da bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado correspondente. Observe que divisão do lado oposto a um vértice de um triângulo ao meio é realizada pela *mediana*, e não pela bissetriz interna.

O resultado fundamental é o que segue.

**Teorema 1** (da bissetriz interna). *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se a bissetriz interna do ângulo  $\hat{A}$  intersecta o lado  $BC$  no ponto  $D$ , então  $D$  divide o lado  $BC$  em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é,*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}.$$

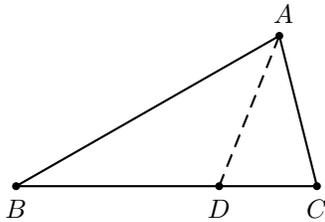
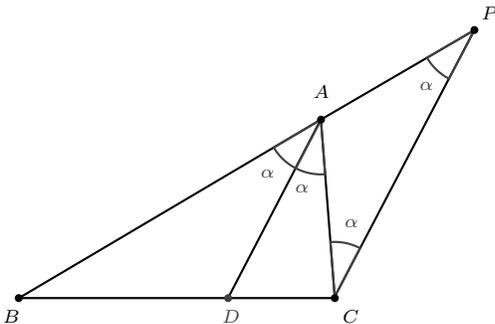


Figura 1: o teorema da bissetriz interna.

**Observação 2.** *Veja que o lado esquerdo da igualdade acima representa a razão em que o ponto  $D$  divide o lado  $BC$ .*

**Prova.** Sendo  $AD$  a bissetriz interna de  $\hat{A}$ , tracemos uma paralela pelo vértice  $C$  à bissetriz  $AD$ , a qual encontrará o prolongamento de  $\overrightarrow{BA}$  em um ponto  $P$ .



Pelo axioma das paralelas, o triângulo  $APC$  é isósceles (um de seus ângulos é alterno interno com uma das meta-

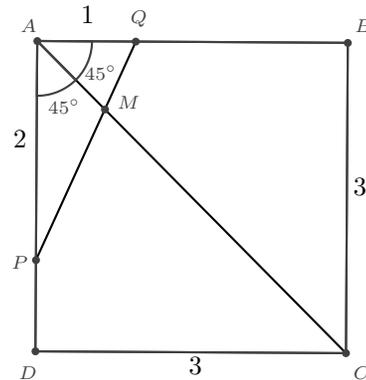
des do ângulo  $\hat{A}$  e o outro é correspondente à outra metade). Portanto, segue do Teorema de Tales que  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AP}$ , ou, ainda (uma vez que  $AP = AC$ ),

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

□

**Exemplo 3.** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos sobre os lados  $DA$  e  $AB$ , respectivamente, de um quadrado de lado 3, tais que  $AP = 2$  e  $AQ = 1$ . Se a diagonal  $AC$  do quadrado intersecta o lado  $PQ$  no ponto  $M$ , calcule a razão em que  $M$  divide o segmento  $PQ$ .*

**Solução.** Observe a figura abaixo, representativa da situação em questão.



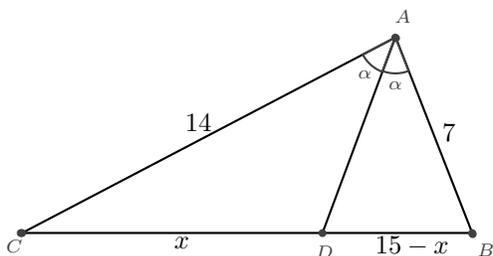
É bem sabido que a diagonal  $AC$  divide o ângulo  $\hat{BAD}$  ao meio. Assim,  $AM$  é bissetriz interna do triângulo  $APQ$ . Daí, pelo teorema da bissetriz interna, tem-se

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{2}{1} = 2.$$

□

**Exemplo 4.** *Os lados de um triângulo medem 7cm, 14cm e 15cm. Calcule a medida do maior segmento que a bissetriz interna do ângulo oposto ao maior lado determina sobre o mesmo.*

**Solução.** Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $AB = 7$ ,  $BC = 15$  e  $CA = 14$  (veja a figura a seguir), queremos calcular o comprimento do maior segmento determinado, sobre o lado  $BC$ , pela bissetriz interna partindo de  $A$ .



Tal segmento será o adjacente a  $AC$  (pois a proporcionalidade do teorema da bissetriz interna garante que o maior segmento determinado fica ao lado do maior lado). Sendo  $x$  a medida desse segmento, o outro segmento sobre  $BC$  medirá  $15 - x$ . Agora, pelo teorema da bissetriz interna,

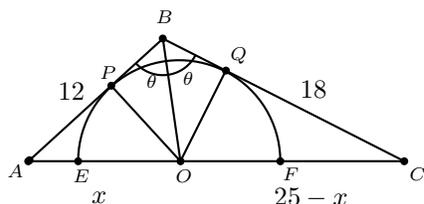
$$\frac{15 - x}{7} = \frac{x}{14} \Leftrightarrow 210 - 14x = 7x$$

$$\Leftrightarrow 21x = 210 \Leftrightarrow x = 10.$$

□

**Exemplo 5.** No triângulo  $ABC$ , em que  $AB = 12$ ,  $BC = 18$  e  $AC = 25$ , um semicírculo é desenhado com diâmetro sobre o lado  $AC$ , de tal forma que ele seja tangente aos lados  $AB$  e  $BC$ . Se  $O$  é o centro do semicírculo, encontre a medida de  $AO$ .

**Solução.** A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.



Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de tangência desse semicírculo com os lados  $AB$  e  $BC$ , respectivamente. Pelo teorema do 'bico', temos  $BP = BQ$ . Além disso,  $BO$  é lado comum aos triângulos  $BPO$  e  $BQO$ , que ainda têm lados  $PO$  e  $QO$  com comprimentos iguais, pois são raios do semicírculo. Isso garante a congruência entre os triângulos  $BPO$  e  $BQO$ , pelo caso de congruência LLL. Portanto,  $\widehat{PBO} = \widehat{QBO}$ , ou seja,  $BO$  é bissetriz interna de  $\widehat{ABC}$ .

Agora, sendo  $x$  a medida de  $AO$ , temos que  $25 - x$  é a medida de  $OC$ . Portanto, pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{x}{12} = \frac{25 - x}{18} \Leftrightarrow 18x = 300 - 12x$$

$$\Leftrightarrow 30x = 300 \Leftrightarrow x = 10.$$

□

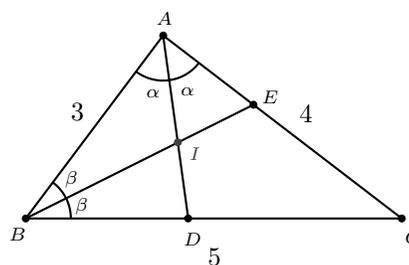
Para o próximo exemplo, recorde que o **incentro** de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do mesmo, e que tal ponto equidista dos lados do triângulo; em particular, ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

**Exemplo 6.** Seja  $ABC$  um triângulo com lados  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  e  $BC = 5$ . Seja também  $D$  o ponto sobre o lado  $BC$  tal que  $AD$  é a bissetriz interna do ângulo  $\widehat{A}$ . Se  $I$  é o incentro de  $ABC$ , calcule:

(a) a medida do segmento  $BD$ ;

(b) a razão em que o ponto  $I$  divide a bissetriz interna  $AI$ .

**Solução.** A figura a seguir servirá à análise de ambos os itens pedidos.



(a) Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo  $ABC$ , temos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Aplicando as propriedades de proporções à igualdade acima, podemos repetir os numeradores e, em seguida, somá-los aos denominadores. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{3 + 4} \Leftrightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow BD = \frac{15}{7}.$$

(b) Agora, a ideia é perceber que o segmento  $BI$  também é bissetriz interna do triângulo  $ABD$ . Assim, pelo teorema da bissetriz interna, obtemos

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{3}{\frac{15}{7}} \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{7}{5}.$$

□

**Exemplo 7.** A bissetriz interna  $AD$  de um triângulo  $ABC$  divide o lado oposto em dois segmentos  $BD$  e  $CD$ , de medidas respectivamente iguais a  $24\text{cm}$  e  $30\text{cm}$ . Sabendo que  $AB$  e  $AC$  têm comprimentos respectivamente iguais a  $2x + 6$  e  $3x$ , calcule o valor de  $x$  e as medidas de  $AB$  e  $AC$ .

**Solução.** Uma vez mais pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{2x + 6}{3x} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 12x = 10x + 30 \Leftrightarrow x = 15.$$

Portanto,

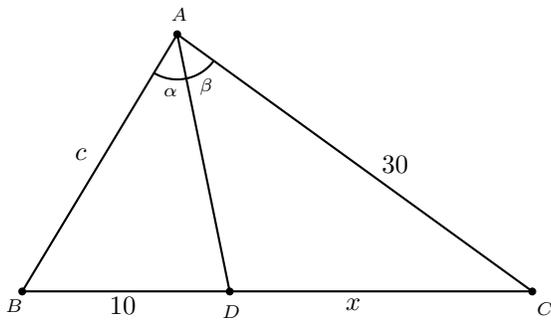
$$AB = 2x + 6 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$$

e, analogamente,  $AC = 45$ . □

**Exemplo 8.** Calcule a medida do lado  $AB$  do triângulo  $ABC$  sabendo que:

- (i) a bissetriz interna  $AD$  de  $\hat{A}$  determina o segmento  $BD$  de medida  $10\text{cm}$ ;
- (ii) o lado  $AC$  mede  $30\text{cm}$ ;
- (iii) o perímetro de  $ABC$  é  $75\text{cm}$ .

**Solução.** Representamos a situação descrita na figura abaixo:



Aplicando o teorema da bissetriz interna, obtemos

$$\frac{c}{10} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow cx = 300.$$

Por outro lado, a medida do perímetro de  $ABC$  fornece a igualdade  $c + 10 + x + 30 = 75$ , de sorte que

$$c + x = 35.$$

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} c + x = 35 \\ cx = 300 \end{cases},$$

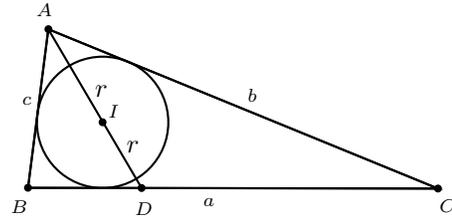
concluimos que  $c$  e  $x$  medem, alguma ordem,  $15$  e  $20$ . Logo,  $AB$  mede  $15\text{cm}$  ou  $20\text{cm}$  (observe que ambas essas medidas verificam a desigualdade triangular, de modo que realmente há duas soluções possíveis). □

Terminemos esta seção apresentando um exemplo um tanto mais elaborado.

**Exemplo 9.** Prove que não existe triângulo no qual o círculo inscrito divide a bissetriz interna de um ângulo em três segmentos de mesmo comprimento.

**Prova.** Considere a figura a seguir como representativa da situação do problema. Por contradição, suponha que a bissetriz interna  $AD$  fique dividida, pelo círculo inscrito,

em três segmentos de comprimentos iguais. Então, sendo  $I$  o incentro de  $ABC$  e  $r$  o raio do círculo inscrito, é imediato que  $AI = ID = 3r$ .



Agora, aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo  $ABD$  (com a bissetriz  $AD$ ), vimos no Exemplo 6 que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}.$$

Se juntarmos esse resultado com o teorema da bissetriz interna aplicado ao triângulo  $ABC$  (com bissetriz  $AD$ ) e utilizarmos propriedades de proporções, obtemos

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{b + c}{a}.$$

Mas, como  $AI = ID = 3r$ , seguiria daí que

$$\frac{b + c}{a} = \frac{AI}{ID} = \frac{3r}{3r} = 1,$$

o que contradiz a desigualdade triangular. Segue o resultado. □

## 2 O teorema da bissetriz externa

Finalmente, vamos ao *Teorema da Bissetriz Externa*, que trata da razão em que o pé da bissetriz externa de um dos ângulos de um triângulo divide o prolongamento do lado correspondente.

Para o que segue, suponha dado um triângulo  $ABC$  tal que  $AB \neq AC$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que  $AB > AC$ , não é difícil concluir que a bissetriz do ângulo externo de  $ABC$  no vértice  $A$  (conhecida como a **bissetriz externa** de  $ABC$  relativa a  $A$ ) intersecta a reta  $\overleftrightarrow{BC}$  em um ponto  $E$  tal que  $C \in DE$  (cf. Figura 2). Nesse caso, dizemos que  $E$  é o **pé da bissetriz externa** relativa ao vértice  $A$  (ou ao lado  $BC$ ). Doravante, assumiremos a validade de tais observações sem maiores comentários.

O resultado fundamental é o que segue.

**Teorema 10** (da bissetriz externa). *Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $AB > AC$ . Se  $E$  é o pé da bissetriz externa relativa ao vértice  $A$ , então  $E$  divide o lado  $BC$  (externamente) em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados. Em símbolos,*

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}.$$

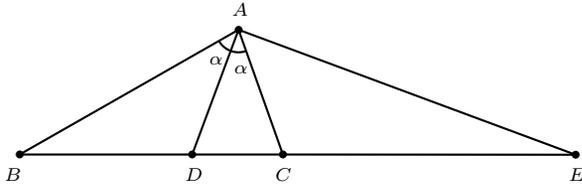


Figura 2: o teorema da bissetriz externa.

**Prova.** Pelo ponto  $C$ , tracemos a reta  $CF$  paralela à reta  $AB$ , com  $F$  sobre o segmento  $AE$  (cf. Figura 3).

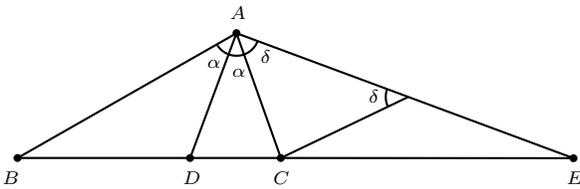


Figura 3: prova do teorema da bissetriz externa.

Sejam  $\widehat{A} = 2\alpha$  e  $\widehat{CAE} = \delta$ . Como  $AE$  é bissetriz externa relativa ao vértice  $A$ , temos  $\delta = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$ . Por outro lado, como  $\angle BAF$  e  $\angle CFA$  são ângulos alternos internos, temos

$$\begin{aligned} \widehat{CFA} &= 180^\circ - \widehat{BAF} = 180^\circ - (2\alpha + \delta) \\ &= 2(90^\circ - \alpha) - \delta = 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

Assim,  $ACF$  é um triângulo isósceles, com  $AC = CF$ .

Aplicando o Teorema de Tales às paralelas  $AB$  e  $CF$ , com transversais  $AE$  e  $BE$ , obtemos

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{CF}.$$

Mas, como  $AC = CF$ , isso é o mesmo que  $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$ .  $\square$

### Observações 11.

1. Atente como é fácil lembrar o teorema da bissetriz externa a partir do teorema da bissetriz interna: basta substituir o ponto  $D$  pelo ponto  $E$  nas equações que são os resultados.
2. As bissetrizes interna e externa são sempre perpendiculares entre si. Verifique essa afirmação!

**Exemplo 12.** Sejam  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$  e  $AD$  e  $AE$  as bissetrizes interna e externa, respectivamente, relativas ao vértice  $A$ . Se  $AB = 3$  e  $AC = 4$ , então  $DE$  mede:

(a) 17.

(b) 18.

(c)  $\frac{120}{7}$ .

(d)  $\frac{125}{7}$ .

**Solução.** Pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{3 + 4} \\ &\Leftrightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow BD = \frac{15}{7}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\begin{aligned} \frac{BE}{EC} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{BE}{EC - BE} = \frac{3}{4 - 3} \\ &\Leftrightarrow \frac{BE}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow BE = 15. \end{aligned}$$

Portanto,

$$ED = EB + BD = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7}.$$

$\square$

**Exemplo 13.** Sejam  $D$  e  $E$  respectivamente os pés das bissetrizes interna e externa do ângulo  $\widehat{A}$  do triângulo  $ABC$ . Sabendo que  $AB = 4$ ,  $AC = 2$  e  $BC = 3$ , calcule o comprimento do raio do círculo circunscrito ao triângulo  $DAE$ .

**Solução.** Pelo teorema da bissetriz interna (esboce uma figura para acompanhar os argumentos), temos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como  $BC = 3$ , temos  $BD = 2$  e  $DC = 1$ .

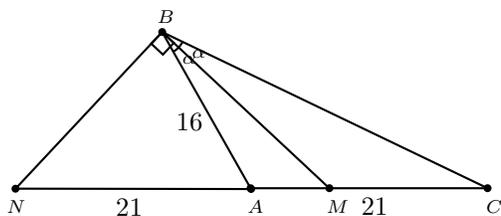
Pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\begin{aligned} \frac{BE}{EC} = \frac{4}{2} = 2 &\Leftrightarrow \frac{BE - EC}{EC} = \frac{4 - 2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{EC} = 1 \Leftrightarrow CE = 3. \end{aligned}$$

Como  $AD$  e  $AE$  são perpendiculares, concluímos que o segmento  $DE$ , que mede 4, é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo  $DAE$ . Assim, o comprimento do raio de tal círculo mede 2.  $\square$

**Exemplo 14.** Em um triângulo  $ABC$ , as bissetrizes interna e externa traçadas a partir do vértice  $B$  encontram o lado oposto (ou seu prolongamento) nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Se  $AC = 21$ ,  $AB = 16$  e  $AN = 21$ , calcule os comprimentos dos segmentos  $BC$  e  $AM$ .

**Solução.** Primeiramente, observe que as igualdades  $AN = 21$  e  $AC = 21$  garantem que  $A$  é o ponto médio do segmento  $CN$  (veja a figura abaixo).



Agora, pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\frac{NA}{NC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{21}{42} = \frac{16}{BC} \Leftrightarrow BC = 32.$$

Por outro lado, pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MC} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{AM}{AM + MC} = \frac{1}{1 + 2} \\ &\Leftrightarrow \frac{AM}{21} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AM = 7. \end{aligned}$$

□

### Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. Ao longo dos exemplos, você deve sempre enfatizar o uso de uma das versões do teorema da bissetriz como ferramenta principal, assim como pode utilizar exemplos mais elaborados (veja as referências). Os teoremas das bissetrizes interna e externa têm aplicações interessantes à Geometria, sendo um exemplo notável aquele dado pelo *círculo de Apolônio*. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [1].

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.