Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Fórmulas de Diferenciação

Exercícios - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Fevereiro de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta aula, apresentaremos vários exemplos envolvendo as regras de diferenciação estudadas no módulo anterior. Para conveniência do leitor, tais regras serão listadas na próxima seção.

1 Revisando as fómulas de diferenciação

Sejam $f,g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in I$ e c um número real. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g, se $g(a) \neq 0$, também são deriváveis em a. Além disso, valem as fórmulas:

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a), \tag{1}$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \tag{2}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), \tag{3}$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2} \quad (g(a) \neq 0). \tag{4}$$

2 Exemplos

Exemplo 1. *Sejam $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves tais que $f'' = k \cdot f$ e $g'' = k \cdot g$, sendo k um número real* [1]. *Prove que a função $\varphi = fg' - f'g$ é constante.*

Solução. Precisamos mostrar que a derivada da função φ é identicamente nula. (De fato, $\varphi' \equiv 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi' \leq 0$ e tais desigualdades equivalem a dizer que φ é, ao mesmo tempo,

[1] Como veremos, as funçoes $f = \text{sen}$ e $g = \cos$ satisfazem essas condições para $k = -1$. Veja também as fórmulas (7).

monótona não decrescente e monótona não crescente, isto é, φ é constante.) Com efeito, pelas regras de derivação,

$$\begin{aligned}\varphi' &= (fg' - f'g)' \\ &= (fg')' - (f'g)' \\ &= (\cancel{f'g'} + fg'') - (f''g + \cancel{f'g'}) \\ &= fg'' - f''g \\ &= f(k \cdot g) - (k \cdot f)g = 0.\end{aligned}$$

□

Para o próximo e para o último exemplos, convém calcular a derivada de uma função cuja regra tem a forma

$$x \mapsto f(x)/e^x = e^{-x}f(x),$$

sendo f uma função derivável.

Poderíamos utilizar a regra do quociente (4) para esse cálculo. Todavia, observando (pela definição de derivada) que $\frac{d(e^{-x})}{dx} = -e^{-x}$, a regra do produto (3) dá

$$\frac{d(e^{-x}f(x))}{dx} = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x),$$

de sorte que

$$\frac{d(e^{-x}f(x))}{dx} = e^{-x}(f'(x) - f(x)). \tag{5}$$

Exemplo 2. *Resolva a equação diferencial* [2] $\dfrac{dy}{dx} = y$, *ou seja, determine todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $f'(x) = f(x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Se vale $f'(x) - f(x) = 0$, para cada x, então, de acordo com a relação (5), é nula a derivada da função g de regra $g(x) = e^{-x}f(x)$. Portanto, g é constante e, daí,

[2] Grosso modo, uma equação funcional é dita diferencial se nela aparecem derivadas da(s) função(ões) incógnita(s).

$e^{-x}f(x) = k$ para todo x real e para uma certa constante k. Logo, $f(x) = ke^x, x \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, é imediato que $f(x) = ke^x, x \in \mathbb{R}$, implica $f' = f$, de onde se conclui que as soluções da equação diferencial dada são as funções múltiplas da exponencial. □

Exemplo 3.

(*i*) *Calcule f', se $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = x \ln x$.*

(*ii*) *Mostre que $x^x \geq (1/e)^{1/e}$, com igualdade se, e só se, $x = 1/e$. Conclua que $e^\pi > \pi^e$.*

Solução. De acordo com a regra do produto 3,

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Quanto ao item (ii), afirmamos que $1/e$ é ponto de mínimo estrito da função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^x$. Com efeito, o cálculo acima, da derivada da função f, mostra que

$$f'(x) = \ln x + 1 \begin{cases} < 0, \text{se } x < 1/e \\ > 0, \text{se } x > 1/e \end{cases},$$

de modo que $1/e$ é ponto de mínimo estrito de f. Portanto, $f(x) \geq f(1/e)$ e a igualdade ocorre precisamente quando $x = 1/e$. Assim, levando em conta que a função exponencial é crescente e observando a relação $e^{f(x)} = g(x), x > 0$, concluímos que

$$x^x = g(x) \geq g(1/e) = (1/e)^{1/e},$$

com igualdade se, e só se, $x = 1/e$. Em particular, como $1/\pi \neq 1/e$, vale

$$(1/\pi)^{1/\pi} > (1/e)^{1/e} \Leftrightarrow \pi^{1/\pi} < e^{1/e} \Leftrightarrow \pi^e < e^\pi.$$

□

Faremos, agora, uma breve introdução às *funções trigonométricas hiperbólicas.*

Para cada número real x, o **cosseno hiperbólico de $\boldsymbol{x}$**, denotado $\cosh x$, e o **seno hiperbólico de $\boldsymbol{x}$**, denotado $\operatorname{senh} x$, são definidos como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{6}$$

Obviamente, $\cosh x > 0$; por outro lado, com um cálculo simples chega-se a identidade

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

Portanto, ao variarmos x, o ponto $(\cosh x, \operatorname{senh} x)$ percorre o ramo à direita da hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$, o que explica o nome dessas funções.

Naturalmente, as regras em (6) definem funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo

$$\cosh' x = \operatorname{senh} x \quad \text{e} \quad \operatorname{senh}' x = \cosh x, \tag{7}$$

para cada x real (exercício).

Exemplo 4. *Defina a função* tangente hiperbólica*,* $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, pela regra*

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{8}$$

Prove que tgh *é derivável e calcule* tgh'*. Mais ainda, mostre que a tangente hiperbólica admite inversa* $g := \operatorname{tgh}^{-1}$ *(definida na imagem de* tgh*) derivável e obtenha a expressão de* g'*.*

Solução. Como $\cosh x > 0$, para cada x, a função tgh está bem definida e é derivável, pela regra do quociente. Além disso, a fórmula (4) dá

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}'(x) &= \frac{\operatorname{senh}' x \cdot \cosh x - \operatorname{senh} x \cdot \cosh' x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}. \end{aligned}$$

Para calcular a inversa g, será útil reescrever a expressão que define a tangente hiperbólica de x como

$$\operatorname{tgh} x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

(Basta dividir o numerador e o denominador do quociente em (8) por e^x.) Como $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, conclui-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tgh} x = 1,$$

enquanto a igualdade

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = -1$$

segue da relação anterior, pelo fato da tangente hiperbólica ser uma função ímpar. Como a função tgh é crescente, pois admite derivada positiva, os limites acima asseguram que essa função é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo aberto $(-1,1)$ (também utilizamos a continuidade de tgh). Portanto, pelo teorema 6 da aula *Reta Tangente - Parte 1*, $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ é derivável, valendo

$$g'(y) = \frac{1}{\operatorname{tgh}'(g(y))} = \cosh^2(g(y)),$$

para cada $y \in (-1,1)$. Como

$$y = \operatorname{tgh}(g(y)) = \frac{\operatorname{senh}(g(y))}{\cosh(g(y))},$$

a relação $\operatorname{senh}(g(y)) = y\cosh(g(y))$ segue e, portanto,

$$\begin{aligned} g'(y) = \cosh^2(g(y)) &= 1 + \operatorname{senh}^2(g(y)) \\ &= 1 + y^2\cosh^2(g(y)) \\ &= 1 + y^2 g'(y). \end{aligned}$$

Finalmente, resolvendo a equação acima para $g'(y)$, obtemos

$$g'(y) = \frac{1}{1 - y^2},$$

para cada $y \in (-1,1)$. $\square$

Exemplo 5.

(*i*) *Derive a função* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(u) = \frac{a^u - 1}{u},$$

sendo a um número real positivo.

(*ii*) *Prove a desigualdade de Bernoulli:*

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \tag{9}$$

para todos $x \geq -1$ *e* $\alpha \geq 1$*. Além disso, mostre que a igualdade em* (9) *ocorre se, e somente se,* $x = 0$ *ou* $\alpha = 1$*.*

Solução. Utilizando a regra do quociente 4, temos

$$\begin{aligned} g'(u) &= \frac{(a^u \ln a) \cdot u - (a^u - 1) \cdot 1}{u^2} \\ &= \frac{a^u(u \ln a - 1) + 1}{u^2}. \end{aligned}$$

Quanto à segunda parte, note que a igualdade na relação (9) de fato ocorre caso tenhamos $x = 0$ ou $\alpha = 1$. Assim, supondo $-1 < x \neq 0$ e $\alpha > 1$ (o que ocorre se $x = -1$?), é suficiente demonstrar a versão estrita da desigualdade de Bernoulli.

Nessas condições, convém reescrever g' como

$$g'(u) = \frac{a^u[a^{-u} - (\ln a^{-u} + 1)]}{u^2}.$$

Pelo exemplo 12 da 1ª parte da aula *Propriedades* do módulo anterior, sabemos que $0 < v \neq 1 \Rightarrow v - (\ln v + 1) > 0$. Assim, se $0 < a \neq 1$ e $u > 0$, então $v = a^{-u}$ é um número positivo e diferente de 1, de forma que $a^{-u} - (\ln a^{-u} + 1) > 0$. Essa condição, quando aplicada à ultima expressão para a derivada da função g, garante a positividade de g', o que, por sua vez, assegura que g é crescente. Em particular, vale $g(\alpha) > g(1) = a - 1$, pois $\alpha > 1$.

Como, por hipótese, $1+x$ é um número positivo e distinto da unidade, é lícito tomar $a = x + 1$ na discussão acima, o que resulta em

$$g(\alpha) = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} > x \Rightarrow (1+x)^\alpha > 1 + \alpha x,$$

como queríamos.

$\square$

Exemplo 6. *Se n é um natural maior que 2 e a é um número real positivo, determine o número de raízes reais da equação*

$$x^n - ax^2 - a = 0. \tag{10}$$

Solução. Digamos que x_0 seja uma raiz da equação (10). Então, $x_0^n - (x_0^2 + 1)a = 0$ ou, equivalentemente,

$$\frac{x_0^n}{x_0^2 + 1} = a.$$

Dessa forma, definindo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela regra

$$f(x) = \frac{x^n}{x^2 + 1},$$

concluímos que a equação (10) admite solução em um intervalo I se, e só se, a pertence à imagem da restrição $f|_I$. Conforme o argumento a seguir, é isso que ocorre quando $I = (0, +\infty)$.

Realmente, sendo $n > 2$, é fácil concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Essa informação, aliada ao fato de que $f(0) = 0$ e $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, garante que f aplica o intervalo $(0, +\infty)$ sobre si mesmo (por que?). Em particular, como $a > 0$, existe algum número positivo x_0 satisfazendo $f(x_0) = a$, de sorte que $x_0 \in (0, +\infty)$ é uma raiz da equação (10).

Veremos, agora, que x_0 é a única raiz da equação dada em $(0, +\infty)$. De fato, basta provar que f é injetiva nesse intervalo. Para esse fim, calcularemos, com auxílio da regra do quociente (4), a derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{nx^{n-1}(x^2+1) - x^n(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(nx^{n+1} + nx^{n-1}) - 2x^{n+1}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(n-2)x^{n+1} + nx^{n-1}}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Da expressão para f' fica claro que essa derivada é positiva em $(0, +\infty)$, de onde se conclui que f é crescente (e, portanto, injetiva) naquele intervalo.

Para finalizar, se n for ímpar, então $f(x) < 0$ se $x \leq 0$, o que garante x_0 como única raiz. Se n for par, então f é uma função par, de forma que $f(-x_0) = f(x_0) = a$. Portanto, nesse caso, $\pm x_0$ são as únicas raízes da equação (10). $\square$

Exemplo 7. *Se x é um número real diferente de 1, mostre que*

$$\begin{aligned} &1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n = \\ &= \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

para cada n natural.

Solução. Aqui, a ideia é perceber que o primeiro membro da fórmula (11) é a derivada em x da função polinomial f de regra

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1}.$$

Vendo a expressão para f como a soma dos termos de uma PG de razão x, também vale que

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1},$$

se $x \neq 1$. Assim, podemos escrever, com auxílio da regra do quociente,

$$\begin{aligned} 1 + 2x + \cdots + (n+1)x^n = f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\right) \\ &= \frac{(n+2)x^{n+1}(x-1) - (x^{n+2}-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

para cada número real x diferente da unidade. □

Digamos que uma função polinomial p satisfaça a inequação diferencial $p' \leq p$. Então, de acordo com a fórmula (5), a função $x \mapsto g(x) := p(x)/e^x$ tem derivada não positiva, qual seja, $g'(x) = (p'(x) - p(x))/e^x$. A conclusão é que g é monótona não crescente. Em particular,

$$g(x) \geq \lim_{t \to +\infty} g(t),$$

para cada x real, enquanto o limite no 2º membro da igualdade acima é nulo (vide exemplo 3 da 1ª parte da aula de exercícios do módulo anterior). Assim, g, e com maior razão p, é não negativa. Utilizaremos essa ideia repetidas vezes na solução do

Exemplo 8. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial tal que*

$$f(x) - f'(x) - f''(x) + f'''(x) \geq 0, \qquad (12)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Considere a função polinomial $p = f - f''$. Então,

$$p' = f' - f''' \leq f - f'' = p,$$

de acordo com a desigualdade (12).

Pelo argumento que antecede o exemplo, p é não negativa. Como $(f + f')' - (f + f') = f'' - f = -p \leq 0$, vale $q' \leq q$

se $q = f + f'$. Como antes, conclui-se que q é uma função polinomial não negativa.

Finalmente, observando (mais uma vez, a partir da definição de derivada) que $\frac{d[f(-x)]}{dx} = -f'(-x)$, a função polinomial $r(x) = f(-x)$ satisfaz

$$r'(x) = -f'(-x) \leq f(-x) = r(x),$$

onde a inequação anterior segue de $q(-x) \geq 0$. Logo, $r \geq 0$ e isso equivale a $f \geq 0$. $\square$

Dicas para o Professor

A validade da fórmula (11) pode ser estabelecida via indução matemática (sugira essa abordagem a seus alunos como exercício).

O leitor atento poderia alegar, com razão, que no exemplo 6 calculamos apenas o número de raízes distintas da equação (10), pois nada argumentamos sobre as multiplicidades daquelas raízes. Na verdade, tais raízes são simples, como o próprio leitor pode verificar, mostrando que as igualdades $p(x_0) = 0$ e $p'(x_0) = 0$ não podem ocorrer simultaneamente, em que $p(x) = x^n - ax^2 - a$.

Duas sessões de 50 minutos devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.