Material Teórico - Módulo Progressões Aritméticas

Progressões Aritméticas

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Sequências elementares e progressões aritméticas

Uma **sequência infinita** de números reais é uma lista ordenada infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, em que cada $a_k \in \mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De outro modo, podemos definir uma sequência infinita de números reais como uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotando $a_k = a(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que as duas definições dadas acima coincidem. Doravante, denotaremos uma sequência infinita qualquer de números reais por $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(a_k)_{k\geq 1}$.

Uma **sequência finita** de números reais é uma lista ordenada finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, n é denominado o **número de termos** da sequência. Se denotamos por I_n o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, também podemos definir uma sequência finita de n termos reais como uma função $a : I_n \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $a(k) = a_k$ para cada $k \in I_n$.

Em ambos os casos acima, cada um dos números reais a_k é um **termo** da sequência, por vezes denominado o **k-ésimo** termo (em alusão ao fato de que ele é o termo que ocupa a posição k).

Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é dada por uma **fórmula posicional** se a_k for dado por uma fórmula em k. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1. *A sequência infinita* $(1, 2, 3, \ldots)$ *dos números naturais satisfaz a fórmula posicional* $a_k = k$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2. *A sequência infinita* $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$ *dos números naturais obedece a fórmula posicional* $a_k = k^2$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Uma fórmula posicional para os termos de uma sequência dada é um exemplo de **lei de formação** de uma sequência. Outra possibilidade é que uma sequência venha definida **por recorrência**. Nesse caso, são dados um ou mais termos no início da sequência, assim como uma fórmula que permite calcular um termo qualquer em função dos termos anteriores a ele.

Exemplo 3. *Considere a sequência* $(a_k)_{k\geq 1}$ *definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k, \ \forall k \geq 1 \end{cases}.$$

Fazendo $k = 1$*, obtemos* $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$*; fazendo* $k = 2$*, obtemos* $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$*. Prosseguindo dessa forma, podemos encontrar qualquer termo da sequência a partir dos dois termos imediatamente anteriores, uma vez que estes tenham sido calculados.*

Uma **progressão aritmética**, ou abreviadamente **PA**, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), dada por uma recorrência do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = a_k + r, \ \forall k \geq 1. \end{cases},$$

onde a e r são números reais conhecidos. O número $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$ é denominado a **razão** da PA. Por exemplo, as sequências dos números naturais ímpares $(1, 3, 5, \ldots)$ e dos números naturais pares $(0, 2, 4, \ldots)$ são ambas PAs de razão igual a 2. A sequência dos múltiplos inteiros positivos de 3, isto é, $(3, 6, 9, \ldots)$, é uma PA de razão 3. Mais geralmente, dado um número natural p, a sequência $(p, 2p, 3p, \ldots)$, formada pelos múltiplos positivos de p, é uma PA de razão p.

Costumamos classificar uma PA $(a_k)_{k\geq 1}$ como:

(i) **Crescente**, se $a_{k+1} > a_k$, $\forall k \geq 1$.

(ii) **Decrescente**, se $a_{k+1} < a_k$, $\forall k \geq 1$

(iii) **Constante**, se $a_{k+1} = a_k$, $\forall k \geq 1$.

Uma vez que a diferença $a_{k+1} - a_k$ é sempre igual à razão r, concluímos imediatamente que a PA em questão é:

(i)' Crescente, se $r > 0$.

(ii)' Decrescente, se $r < 0$.

(iii)' Constante, se $r = 0$.

Os três exemplos a seguir exercitam os conceitos acima.

Exemplo 4. *Encontre todas as PAs crescentes, formadas por três termos tais que sua soma seja* 24 *e o seu produto seja* 440.

Solução. Geralmente, utilizamos a notação $(x-r, x, x+r)$ para denotar uma PA de três termos e com razão r. Como a soma desses termos é igual a 24, obtemos:

$$(x - \cancel{r}) + x + (x + \cancel{r}) = 24 \Longrightarrow 3x = 24 \Longrightarrow x = 8.$$

Agora, como o produto dos três termos é igual a 440, temos:

$$\begin{aligned} (8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 440 &\Longrightarrow (8 - r) \cdot (8 + r) = \frac{440}{8} \\ &\Longrightarrow 64 - r^2 = 55 \\ &\Longrightarrow r^2 = 9 \\ &\Longrightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Observe que, na última implicação acima, obteríamos $r = 3$ ou $r = -3$; entretanto, como a PA procurada é crescente, devemos ter $r > 0$, o que elimina a possibilidade $r = -3$. Portanto, a PA procurada é $(5, 8, 11)$. □

A fim de que você possa apreciar adequadamente a simplificação algébrica que a notação $(x-r, x, x+r)$ traz para a solução do problema anterior, sugerimos que o refaça denotando a PA por $(a, a+r, a+2r)$.

Exemplo 5. *Obtenha* 5 *números em PA de tal modo que a sua soma seja* 25 *e a soma dos seus cubos seja* 3025.

Solução. Denotaremos os cinco termos em PA por $x-2r$, $x-r$, x, $x+r$ e $x+2r$, de sorte que r seja a razão. Dessa forma, temos:

$$(x-\cancel{2r})+(x-\cancel{r})+x+(x+\cancel{r})+(x+\cancel{2r})=25$$
$$\Longrightarrow 5x=25 \Longrightarrow x=5.$$

Por outro lado, temos:

$$(x-r)^3 = x^3-3x^2r+3xr^2-r^3,$$
$$(x+r)^3 = x^3+3x^2r+3xr^2+r^3,$$
$$(x-2r)^3 = x^3-6x^2r+12xr^2-8r^3$$

e

$$(x+2r)^3 = x^3+6x^2r+12xr^2+8r^3.$$

Somando membro a membro as cinco igualdades acima, efetuando os cancelamentos que são evidentes e usando a hipótese de que a soma dos cubos dos cinco termos é igual a 3025, obtemos:

$$5x^3+30xr^2=3025.$$

Substituindo $x=5$ na equação acima, chegamos a

$$150r^2=3025-625 \Longrightarrow r^2=\frac{2400}{150}=16.$$

Portanto, $r=4$ ou $r=-4$.

Por fim, com $r=4$, concluímos que os números procurados são $5-2\cdot 4=-3$, $5-4=1$, 5, $5+4=9$ e $5+2\cdot 4=13$. Observe que, se tomássemos $r=-4$, obteríamos os mesmos números, mas escritmos em ordem decrescente. Contudo, é importante você perceber que $(-3,1,5,9,13)$ e $(13,9,5,1,-3)$ são PAs distintas; apenas os conjuntos de seus termos são iguais! $\square$

Exemplo 6. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA de razão r. Mostre que as sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$, definidas por $b_k=a_{2k}$ e $c_k=a_{2k-1}$ para todo $k\geq 1$, também são PA's, mas ambas de razão igual a $2r$.*

Solução. Inicialmente, observe que não há mistério nas leis de formação das sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$. Elas são simplesmente as sequências $(a_2,a_4,a_6,\ldots)$ e $(a_1,a_3,a_5,\ldots)$.

Note agora que, para todo $k\geq 1$ inteiro, temos:

$$b_{k+1}-b_k=a_{2(k+1)}-a_{2k}=a_{2k+2}-a_{2k}.$$

A fim de utilizar o fato de que $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, somamos e subtraímos o termo a_{2k+1} à diferença $a_{2k+2}-a_{2k}$, obtendo:

$$\begin{aligned} b_{k+1}-b_k &= a_{2k+2}-a_{2k}\\ &= (a_{2k+2}-a_{2k+1})+(a_{2k+1}-a_{2k})\\ &= r+r=2r. \end{aligned}$$

Portanto, $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão $2r$.

A prova de que $(c_k)_{k\geq 1}$ também é uma PA de razão $2r$ é análoga e será deixada como exercício. $\square$

A seguir, estabelecemos algumas propriedades importantes das PAs, começando por uma caracterização *recursiva* das PAs que não envolve sua razão.

Proposição 7. *Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA se, e somente se,*

$$a_{k+2}+a_k=2a_{k+1},\ \forall k\geq 1.$$

Prova. De fato, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, temos:

$$a_{k+2}-a_{k+1}=r=a_{k+1}-a_k,\ \forall k\geq 1.$$

Mas isso é o mesmo que

$$a_{k+2}+a_k=2a_{k+1},\ \forall k\geq 1.$$

Reciprocamente, se $a_{k+2}+a_k=2a_{k+1}$, $\forall k\geq 1$, então, reescrevendo tal igualdade como $a_{k+2}-a_{k+1}=a_{k+1}-a_k$, $\forall k\geq 1$, concluímos que:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots.$$

Assim, $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão $r=a_2-a_1$. $\square$

Observe que, em palavras, podemos resumir o resultado anterior dizendo que as PAs são exatamente as sequências tais que, para cada trs termos consecutivos, o do meio é a *média aritmética* dos outros dois.

Finalizamos esta seção com a seguinte proposição, que será útil para o cálculo da soma de uma quantidade arbitrária n de termos de uma PA.

Proposição 8. *Sejam $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA e $n\geq 1$ um inteiro.*

(i) Se n é ímpar, digamos $n=2m-1$, então:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=2a_m.$$

(ii) Se n é par, digamos $n=2m$, então:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_m+a_{m+1}.$$

Para dar uma ideia da demonstração da proposição acima, suponha que $n=7=2\cdot 4-1$. Temos:

$$a_1+a_7=(a_2-\cancel{r})+(a_6+\cancel{r})=a_2+a_6;$$

por sua vez,

$$a_2+a_6=(a_3-\cancel{r})+(a_5+\cancel{r})=a_3+a_5$$

e, finalmente,

$$a_3+a_5=(a_4-\cancel{r})+(a_4+\cancel{r})=2a_4.$$

O caso geral segue exatamente a mesma linha de raciocínio, e será novamente deixado como exercício. (Alternativamente, o leitor pode consultar uma qualquer das referências listadas no final do material.)

2 Fórmulas para o termo geral e para a soma dos termos de uma PA

As fórmulas colecionadas na proposição abaixo são conhecidas como a **fórmula do termo geral** e a **fórmula da soma dos k primeiros termos** de uma PA. Para o enunciado do item (b), é conveniente introduzirmos a notação

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1}$$

para denotar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (ou simplesmente a_1, quando $n = 1$). Aqui, a letra grega maiúscula Σ corresponde ao nosso S (de *soma*), de sorte que (1) denota a soma dos termos a_k, com k variando de 1 a n.

Proposição 9. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA de razão r. Então, valem:*

(a) $a_k = a_1 + (k-1)r,\ \forall k \geq 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},\ \forall n \geq 1.$

Prova. Para o item (a), observe as $k-1$ igualdades abaixo, que ocorrem porque $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = r \\ a_3 - a_2 = r \\ a_4 - a_3 = r \\ \qquad\vdots \\ a_{k-1} - a_{k-2} = r \\ a_k - a_{k-1} = r. \end{cases}$$

Somando essas igualdades membro a membro e efetuando cancelamentos possíveis, obtemos:

$$a_k - a_1 = \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n-1 \text{ vezes}},$$

ou seja,

$$a_k = a_1 + (k-1)r.$$

Quanto a (b), seja $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Temos

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

e, escrevendo os mesmos termos na ordem inversa,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Somando membro a membro as duas igualdades acima, obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Agora, utilizando o resultado da Proposição 8, obtemos (seja n par ou ímpar):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\Longrightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

□

Uma forma alternativa de expressar a fórmula para a soma $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ é obtida substituindo na fórmula do item (b) a expressão para o termo geral:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2} \\ &= \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)r}{2}. \end{aligned}$$

A seguir, discutimos algumas aplicações das fórmulas acima.

Exemplo 10. *Calcule o vigésimo termo da PA cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 3.*

Solução. Utilizando o item (a) da Proposição 9, temos:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot 3 = 5 + 19\cdot 3 = 5 + 57 = 62.$$

□

Exemplo 11. *Calcule a soma dos quinze primeiros termos da PA $(3, 7, 11, \ldots)$.*

Solução. Observe que $a_1 = 3$ e $r = 7 - 3 = 4$. Agora, pela observação feita logo após a Proposição 9, temos:

$$\begin{aligned} S_{15} &= 15a_1 + \frac{15\cdot 14}{2}\cdot r = 15\cdot 3 + \frac{15\cdot \cancel{14}}{\cancel{2}}\cdot 4 = \\ &= 45 + 15\cdot 7\cdot 4 = 45 + 420 = 465. \end{aligned}$$

□

Exemplo 12. *Calcule a soma dos n primeiros números ímpares.*

Solução. Queremos calcular a soma S_n, dos n primeiros termos da PA $(1, 3, 5, \ldots)$. Como $a_1 = 1$ e $r = 3 - 1 = 2$, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot 2 = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$$

e, daí,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + (2n-1))n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2.$$

Alternativamente, utilizando uma vez mais a fórmula alternativa para S_n, deduzida logo após a prova da proposição anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r = n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \\ &= n + n(n-1) = \cancel{n} + n^2 - \cancel{n} = n^2. \end{aligned}$$

$\square$

Nosso último exemplo é consideravelmente mais elaborado, podendo ser omitido numa primeira leitura.

Exemplo 13. *Mostre que os números* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{5}$ *não são termos de uma mesma PA.*

Prova. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são termos de uma PA, digamos $(a_k)_{k\geq 1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $(a_k)_{k\geq 1}$ é crescente. Assim, devem existir m, n e p inteiros positivos tais que $m < n < p$ e $a_m = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{3}$, $a_p = \sqrt{5}$. Agora, utilizando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$\sqrt{2} = a_m = a_1 + (m-1)r,$$

$$\sqrt{3} = a_n = a_1 + (n-1)r$$

e

$$\sqrt{5} = a_p = a_1 + (p-1)r.$$

Manipulando as equações acima, obtemos:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = [\cancel{a_1} + (n-1)r] - [\cancel{a_1} + (m-1)r] = (n-m)r$$

e, analogamente,

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} = (p-m)r.$$

Daí, segue que

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{n-m}{p-m}.$$

Agora, sendo o quociente de dois inteiros, o número $\frac{n-m}{p-m}$ é racional. Portanto, os cálculos acima nos levaram a concluir que $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ é um número racional. Os argumentos que apresentaremos a seguir mostrarão que isso é um absurdo.

Começamos observando que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-2}{5-2} \\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, temos que $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10}$ é racional. Mas, se fosse $\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10} = a$, com a racional (e positivo), teríamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{10} = a &\Leftrightarrow \sqrt{15} + \sqrt{6} = a + \sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{15} + \sqrt{6}\right)^2 = \left(a + \sqrt{10}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 15 + 6 + 2\sqrt{90} = a^2 + 10 + 2a\sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow (2a-6)\sqrt{10} = 10 - a^2. \end{aligned}$$

Há, agora, duas possibilidades:

(i) $2a = 6 = 0$: isso é o mesmo que $a = 3$, e fornece o absurdo $0 \cdot \sqrt{10} = 10 - 3^2$.

(ii) $2a - 6 \neq 0$: então, a partir da última equivalência acima, obtemos

$$\sqrt{10} = \frac{10-a^2}{2a-6}.$$

Por sua vez, isso também é um absurdo, uma vez que $\sqrt{10}$ é irracional mas $\frac{10-a^2}{2a-6}$ é racional (uma vez que a é ele mesmo racional). $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem este material. Na Seção 1, chame a atenção dos alunos para o modo de escrever uma pequena quantidade de termos em PA (pelo menos as que foram utilizadas nos exemplos 4 e 5), pois, conforme mostrado, isso facilita bastante a solução de certos problemas). Na Seção 2, antes de mostrar a fórmula da soma dos termos de uma PA qualquer, tente fazer com que os alunos descubram por meios próprios (possivelmente com a sugestão de *somar duas vezes, invertendo a ordem das parcelas*) o valor de $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$, pois isso vai servir de motivação para o resultado mais geral.

As referências colecionadas a seguir contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.