

Material Teórico - Módulo de Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas

Fatoração de Expressões Algébricas

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



Fatorar uma expressão algébrica inteira E significa escrevê-la como um produto de outras expressões algébricas, caso isso seja possível. Nesse caso, dizemos que um tal produto é uma **forma fatorada** da E . Por exemplo, $(x+y)(x-y)$ é uma forma fatorada da expressão algébrica $x^2 - y^2$. Ao longo desta aula, estudaremos algumas técnicas utilizadas para fatorar expressões algébricas.

1 Fatoração pondo fatores comuns em evidência

Pôr um fator comum em evidência, significa utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para fatorar uma expressão algébrica que é dada por uma soma de monômios, em que existe um fator comum a todos esses monômios. Por exemplo, pondo o fator comum 3 em evidência na expressão $3x + 9$, obtemos $3x + 9 = 3 \cdot x + 3 \cdot 3 = 3(x + 3)$, sendo esta última uma forma fatorada de $3x + 9$.

Exemplo 1. *Fatore a expressão algébrica $5x^2 + 25x$.*

Solução. Observe que o fator $5x$ é comum às parcelas $5x^2$ e $25x$. Portanto, pondo esse fator em evidência, obtemos:

$$5x^2 + 25x = 5x \cdot x + 5x \cdot 5 = 5x(x + 5).$$

□

Exemplo 2. *Fatore a expressão algébrica $6a^3 + 2a^2 - 10a$.*

Solução. Neste caso, note que o fator $2a$ é comum aos monômios $6a^3$, $2a^2$ e $-10a$. Portanto, obtemos uma forma fatorada de $6a^3 + 2a^2 - 10a$ procedendo do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 6a^3 + 2a^2 - 10a &= 2a \cdot 3a^2 + 2a \cdot a + 2a \cdot (-5) \\ &= 2a(3a^2 + a - 5). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Fatore a expressão algébrica $15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5$.*

Solução. Denote por F a expressão algébrica do enunciado. Pondo o fator comum $5xy^2z^2$ em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} F &= 15xy^2z^3 - 20x^2y^3z^2 - 10x^3y^4z^5 \\ &= 5xy^2z^2 \cdot 3z + 5xy^2z^2 \cdot (-4xy) + 5xy^2z^2 \cdot (-2x^2y^2z^3) \\ &= 5xy^2z^2(3z - 4xy - 2x^2y^2z^3). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Fatorando o numerador e o denominador, simplifique a expressão algébrica $\frac{9a^2 - 3a}{6ab - 2b}$.*

Solução. Pondo o fator $3a$ em evidência no numerador, obtemos:

$$\begin{aligned} 9a^2 - 3a &= 3a \cdot 3a + 3a \cdot (-1) \\ &= 3a(3a - 1). \end{aligned}$$

Agora, pondo o fator comum $2a$ em evidência no denominador, obtemos:

$$\begin{aligned} 6ab - 2b &= 2b \cdot 3a + 2b \cdot (-1) \\ &= 2b(3a - 1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{9a^2 - 3a}{6ab - 2b} = \frac{3a(3a - 1)}{2b(3a - 1)} = \frac{3a}{2b}.$$

□

2 Fatoração utilizando produtos notáveis

Outra técnica utilizada para fatorar expressões algébricas é utilizar os produtos notáveis estudados na aula anterior. Por exemplo, notando que $25x^2 + 20x + 4$ pode ser escrito da forma $(5x)^2 + 2 \cdot (5x) \cdot 2 + 2^2$, que, por sua vez, é o quadrado da soma dos termos $5x$ e 2 , obtemos:

$$\begin{aligned} 25x^2 + 20x + 4 &= (5x)^2 + 2 \cdot (5x) \cdot 2 + 2^2 \\ &= (5x + 2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2)$ é uma forma fatorada de $25x^2 + 20x + 4$.

Abaixo seguem mais alguns exemplos que ilustram como obter formas fatoradas de expressões algébricas utilizando produtos notáveis.

Exemplo 5. *Fatore a expressão algébrica $9m^4 - 16n^2$.*

Solução. Inicialmente, note que $9m^4 = (3m^2)^2$ e $16n^2 = (4n)^2$. Agora, utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, segue que

$$\begin{aligned} 9m^4 - 16n^2 &= (3m^2)^2 - (4n)^2 \\ &= (3m^2 + 4n)(3m^2 - 4n). \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo, o qual é consideravelmente mais elaborado que os anteriores, mostra que, por vezes, a utilização de um produto notável como estratégia de fatoração requer um passo intermediário, que, por vezes, resume-se a um *artifício algébrico*. Observamos que, à medida que você adquirir mais experiência com fatorações, artifícios como o que será utilizado nesse exemplo parecerão ser mais naturais do que à primeira vista.

Exemplo 6. *Fatore a expressão $x^4 + 4y^4$.*

Solução. Adicionando e subtraindo o monômio $4x^2y^2$, obtemos

$$\begin{aligned}x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4y^4 + (4x^2y^2 - 4x^2y^2) \\ &= (x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2.\end{aligned}$$

Agora, observamos que a expressão $x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$ é o quadrado de uma soma de dois termos:

$$\begin{aligned}x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 &= (x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2.\end{aligned}$$

Por fim, juntando os dois passos anteriores, escrevendo $4x^2y^2 = (2xy)^2$ e utilizando a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, obtemos:

$$\begin{aligned}x^4 + 4y^4 &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).\end{aligned}$$

□

Exemplo 7. Fatore a expressão algébrica $E = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned}E &= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 \\ &= (2a)^3 - 3 \cdot 4a^2 \cdot b + 3 \cdot (2a) \cdot b^2 - b^3 \\ &= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot (2a) \cdot b^2 - b^3 \\ &= (2a - b)^3,\end{aligned}$$

em que, na última igualdade acima, utilizamos a fórmula para o cubo da diferença de dois termos. □

Exemplo 8. Para obter uma forma fatorada para a expressão $n^6 - 27$, basta notar que $n^6 = (n^2)^3$ e $27 = 3^3$. Depois disso, utilizamos a fórmula da diferença de dois cubos. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}n^6 - 27 &= (n^2)^3 - 3^3 \\ &= (n^2 - 3) \left[(n^2)^2 + n^2 \cdot 3 + 3^2 \right] \\ &= (n^2 - 3)(n^4 + 3n^2 + 9).\end{aligned}$$

Para o próximo exemplo, recorde, da aula anterior, que a fórmula para o cubo da soma de três termos fornece

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Agora, suponha que $x + y + z = 0$. Utilizando a identidade algébrica acima, segue que

$$\begin{aligned}0 &= (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(-z)(-y)(-x),\end{aligned}$$

pois $x + y = -z$, $x + z = -y$ e $y + z = -x$. Daí, temos

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \quad (1)$$

Exemplo 9. Fatore a expressão $(a - c)^3 + (c - b)^3 + (b - a)^3$.

Solução. Note que $(a - c) + (c - b) + (b - a) = a - a + b - b + c - c = 0$. Portanto, utilizando a identidade (1), segue que

$$(a - c)^3 + (c - b)^3 + (b - a)^3 = 3(a - c)(c - b)(b - a).$$

□

A identidade algébrica

$$\begin{aligned}(x - a)(x - b) &= x^2 - ax - bx + ab \\ &= x^2 - (a + b)x + ab\end{aligned}$$

fornece a fatoração

$$x^2 - Sx + P = (x - a)(x - b), \quad (2)$$

em que $S = a + b$ e $P = ab$. Por exemplo, temos

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5),$$

uma vez que $7 = 2 + 5$ e $10 = 2 \cdot 5$. Assim, vemos que a chave para fatorar a expressão $x^2 - Sx + P$ é perceber S como sendo igual à soma e P como sendo igual à diferença de um mesmo par de números a e b , como no exemplo numérico acima. Uma expressão do tipo

$$x^2 - Sx + P$$

é denominada um **trinômio do segundo grau** em x .

O próximo exemplo traz uma aplicação mais elaborada de fatorações do tipo (2).

Exemplo 10. A fim de fatorar a expressão $E = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$, combinamos sucessivamente várias das estratégias discutidas até aqui: aplicamos a propriedade distributiva às duas últimas parcelas, agrupamos as parcelas obtidas em outra ordem, pomos fatores comuns em evidência, utilizamos a fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos e, por fim, fatoramos um trinômio do segundo grau em a :

$$\begin{aligned}E &= a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a) \\ &= a^2(c - b) + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a \\ &= a^2(c - b) + (b^2a - c^2a) + (c^2b - b^2c) \\ &= a^2(c - b) + a(b^2 - c^2) + bc(c - b) \\ &= a^2(c - b) + a(b + c)(b - c) + bc(c - b) \\ &= a^2(c - b) - a(b + c)(c - b) + bc(c - b) \\ &= (c - b) [a^2 - a(b + c) + bc] \\ &= (c - b)(a - b)(a - c).\end{aligned}$$

3 Fatoração por agrupamento

Para fatorar uma expressão algébrica inteira por **agrupamento**, devemos, inicialmente, escrevê-la como soma de outras expressões algébricas (**grupos**), as quais devem ser fatoradas; depois disso, é necessário que apareça um fator comum a todas essas formas fatoradas, o qual deve ser posto em evidência.

Por exemplo, para fatorar a expressão algébrica

$$ac + bc + ad + bd,$$

começamos agrupando suas parcelas da forma $(ac + bc) + (ad + bd)$; em seguida, pomos o fator c em evidência nas duas primeiras parcelas e o fator d em evidência nas duas últimas, obtendo, assim:

$$(ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b).$$

Por fim, pondo $a + b$ em evidência no segundo membro da última igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Observe que, alternativamente, poderíamos ter agrupado a expressão $ac + bc + ad + bd$ da forma $(ac + ad) + (bc + bd)$. Neste caso, o fator a seria posto em evidência na soma $ac + ad$ e o fator b na soma $bc + bd$. Procedendo assim, obteríamos:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (c + d)(a + b), \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, o fator comum $c + d$ foi posto em evidência para que pudéssemos obter a forma fatorada.

Abaixo, seguem mais alguns exemplos, os quais têm por objetivo aperfeiçoar a técnica de fatoração por agrupamento.

Exemplo 11. Fatore a expressão $6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3$.

Solução. Agrupando a expressão na forma $(6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3)$, pomos em evidência o fator $3x$ no primeiro grupo e o fator y^2 no segundo, obtendo:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 &= (6x^2 - 9xy) + (2xy^2 - 3y^3) \\ &= 3x(2x - 3y) + y^2(2x - 3y). \end{aligned}$$

Em seguida, pomos o fator $2x - 3y$ em evidência, chegamos a

$$6x^2 - 9xy + 2xy^2 - 3y^3 = (2x - 3y)(3x + y^2).$$

□

Exemplo 12. Simplifique a expressão algébrica

$$\frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y}.$$

Solução. Fatorando o numerador e o denominador por agrupamento, obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 3x - 3y &= (x^2 - 3x) + (xy - 3y) \\ &= x(x - 3) + y(x - 3) \\ &= (x - 3)(x + y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + xy + 5y &= (x^2 + 5x) + (xy + 5y) \\ &= x(x + 5) + y(x + 5) \\ &= (x + 5)(x + y). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + xy - 3x - 3y}{x^2 + 5x + xy + 5y} &= \frac{(x - 3)(x + y)}{(x + 5)(x + y)} \\ &= \frac{x - 3}{x + 5}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 13. Determine uma forma fatorada para a expressão $E = qm^3 + q^3 - 2m^3 - 2q^2 + q - 2$.

Solução. Agrupando a expressão da forma

$$E = (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2),$$

pondo o fator q em evidência no primeiro grupo e o fator -2 no segundo, obtemos:

$$\begin{aligned} E &= (qm^3 + q^3 + q) + (-2m^3 - 2q^2 - 2) \\ &= q(m^3 + q^2 + 1) - 2(m^3 + q^2 + 1) \\ &= (m^3 + q^2 + 1)(q - 2). \end{aligned}$$

Outra possibilidade seria agrupar $E = (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2)$. Se procedéssemos assim, teríamos:

$$\begin{aligned} E &= (q^3 - 2q^2) + (qm^3 - 2m^3) + (q - 2) \\ &= q^2(q - 2) + m^3(q - 2) + (q - 2) \\ &= (q - 2)(q^2 + m^3 + 1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. Simplifique a expressão $\frac{a^4 - 5a^3 + 3a - 15}{a^3 - 125}$.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} a^4 - 5a^3 + 3a - 15 &= (a^4 - 5a^3) + (3a - 15) \\ &= a^3(a - 5) + 3(a - 5) \\ &= (a - 5)(a^3 + 3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a^3 - 125 &= a^3 - 5^3 \\ &= (a - 5)(a^2 + a \cdot 5 + 5^2) \\ &= (a - 5)(a^2 + 5a + 25).\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\frac{a^4 - 5a^3 - 3a + 15}{a^3 - 125} &= \frac{\cancel{(a-5)}(a^3 + 3)}{\cancel{(a-5)}(a^2 + 5a + 25)} \\ &= \frac{a^3 + 3}{a^2 + 5a + 25}.\end{aligned}$$

□

Como no exemplo 6, utilizamos, no exemplo a seguir, o artifício de somar e subtrair parcelas que, originalmente, não apareciam na expressão a ser fatorada.

Exemplo 15. Encontre uma forma fatorada para a expressão algébrica $S = p^5 + p^4 + 1$.

Solução. Adicionando e subtraindo as parcelas p^3 , p^2 e p a S e depois agrupando, obtemos:

$$\begin{aligned}S &= p^5 + p^4 + (p^3 - p^3) + (p^2 - p^2) + (p - p) + 1 \\ &= p^5 + p^4 + p^3 - p^3 - p^2 - p + p^2 + p + 1 \\ &= p^3(p^2 + p^2 + 1) - p(p^2 + p + 1) + (p^2 + p + 1) \\ &= (p^2 + p + 1)(p^3 - p + 1).\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para cada uma das seções que compõem esta aula. Uma boa compreensão da seção 1 é fundamental para o desenvolvimento das demais. Por isso, é importante que seja dada uma atenção especial a tal seção. Na seção 2, é fundamental que os alunos aprendam a reconhecer um produto notável dentre os termos que compõem uma expressão algébrica inteira.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
2. V. Litvinenko e A. Mordkovitch. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*. Moscou, Editora MIR, 1984.