

# Material Teórico - Módulo de FRAÇÃO COMO PORCENTAGEM E COMO PROBABILIDADE

## Fração como Probabilidade - União e Interseção de Eventos

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda  
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto



# 1 Evento complementar e união de dois eventos

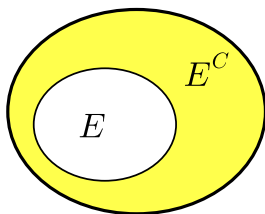
Na aula anterior, aprendemos alguns conceitos básicos sobre probabilidade, tais como os conceitos de **evento** e **espaço amostral**. Vimos também que, quando o espaço amostral é um finito, podemos definir um evento  $E$  como sendo a coleção dos possíveis resultados de um experimento. Em particular, cada evento é um conjunto, de forma que podemos utilizar os conceitos da Teoria dos Conjuntos para desenvolver uma Teoria de Probabilidade.

Ainda no contexto de conjuntos finitos, definimos a **probabilidade** do evento  $E$ , denotada  $P(E)$ , pondo

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A}, \quad (1)$$

onde  $\#X$  denota o número de elementos do conjunto finito  $X$ .

Uma vez que o evento  $E$  é um subconjunto do espaço amostral  $A$ , podemos considerar o **evento complementar** a  $E$ , denotado  $E^c$ , o qual é definido como o conjunto dos elementos de  $A$  que não pertencem a  $E$ :



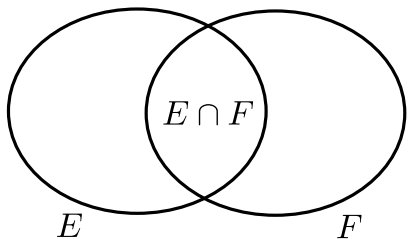
Temos, então, a fórmula para a

## I. Probabilidade do Evento Complementar:

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Em palavras, a identidade acima nos diz que a probabilidade do evento complementar é igual a 1 menos a probabilidade do evento inicial. Por exemplo, se a probabilidade de chover amanhã for  $\frac{1}{3}$ , então a probabilidade de não chover será  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

Agora, sendo  $F$  um outro evento em  $A$ , temos que  $E$  e  $F$  são subconjuntos de  $A$  e, como tal, podemos considerar o **evento união** e o **evento interseção** de  $E$  e  $F$ , denotados por  $E \cup F$  e  $E \cap F$ , respectivamente. Recordamos que



$E \cup F$  é definido como o conjunto dos elementos de  $A$  que pertencem a pelo menos um dentre os conjuntos  $E$  e  $F$ , ao passo que  $E \cap F$  é definido como o conjunto dos elementos de  $A$  que pertencem a ambos os conjuntos  $E$  e  $F$ .

Em termos de probabilidade, esses conceitos nos dão a fórmula para a

## II. Probabilidade da União de Dois Eventos:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Para demonstrar as identidades I e II, comecemos observando que, para dois conjuntos finitos quaisquer  $E$  e  $F$ , vale a fórmula

$$\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F), \quad (2)$$

que pode ser facilmente obtida a partir do *diagrama de Venn* acima, para a união de  $E$  e  $F$ . Realmente, examinando tal diagrama, percebemos que a soma  $\#E + \#F$  conta os elementos de  $E \cap F$  duas vezes, de forma que, para calcular  $\#(E \cup F)$ , precisamos descontar  $\#(E \cap F)$  uma vez.

Dividindo ambos os membros de (2) por  $\#A$ , obtemos

$$\frac{\#(E \cup F)}{\#A} = \frac{\#E}{\#A} + \frac{\#F}{\#A} - \frac{\#(E \cap F)}{\#A}.$$

Em seguida, aplicando (1) para calcular  $P(E \cup F)$ ,  $P(E)$ ,  $P(F)$  e  $P(E \cap F)$ , obtemos  $P(E \cup F) = \frac{\#(E \cup F)}{\#A}$ ,  $P(E) = \frac{\#E}{\#A}$ ,  $P(F) = \frac{\#F}{\#A}$  e  $P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#A}$ . Substituindo tais igualdades na relação acima, obtemos a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos.

Agora, note que a fórmula para a probabilidade do evento complementar é um caso particular da fórmula para a probabilidade da união. Realmente, como  $E \cup E^c = A$  e  $E \cap E^c = \emptyset$ , temos  $P(E \cup E^c) = 1$  e  $P(E \cap E^c) = 0$ ; portanto, fazendo  $F = E^c$  na fórmula para a probabilidade da união de dois eventos, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= P(E \cup E^c) \\ &= P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c) \\ &= P(E) + P(E^c). \end{aligned}$$

# 2 Independência e probabilidade condicional

Outro conceito de grande importância em Probabilidade é o de **independência de dois eventos**, conforme definido a seguir.

**Definição 1.** Dois eventos  $E$  e  $F$  em um espaço amostral  $A$ , são independentes se

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

A fim de explicar a ideia por trás do conceito de independência de dois eventos, suponha que realizamos um certo experimento no espaço amostral finito  $A$  e, ao examinarmos as ocorrências dos eventos  $E$  e  $F$ , suponha que saibamos que  $E$  realmente ocorreu. Então, para que  $F$  ocorra, os resultados favoráveis são aqueles em  $E \cap F$ , dentre os  $\#E$  elementos do evento  $E$ .

O argumento do parágrafo anterior sugere que a probabilidade da ocorrência de  $F$  possa ser calculada dividindo-se  $\#(E \cap F)$  por  $\#E$ . O resultado dessa divisão é a **probabilidade condicional** da ocorrência de  $F$ , dado que  $E$  ocorreu, sendo denotado por  $P(F|E)$ . Em símbolos,

$$P(F|E) = \frac{\#(E \cap F)}{\#E}.$$

Observando que

$$\frac{\#(E \cap F)}{\#E} = \frac{\frac{\#(E \cap F)}{\#A}}{\frac{\#E}{\#A}} = \frac{P(E \cap F)}{P(E)},$$

concluimos que

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

ou, o que é o mesmo,

$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E).$$

Por outro lado, se  $E$  e  $F$  forem eventos independentes, então  $P(F|E)$  realmente coincide com  $P(F)$ . Realmente, nesse caso, segue das definições de probabilidade condicional e de independência de eventos que

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = P(F).$$

A última relação acima deixa claro o porquê do nome “*independentes*” atrelado a um par de eventos  $E$  e  $F$  satisfazendo a relação da Definição 1: uma vez que  $P(F|E) = P(F)$  quando  $E$  e  $F$  são independentes, o cálculo da probabilidade de  $F$  ocorrer *independe* da ocorrência ou não de  $E$ .

É importante o leitor observar que a condição de independência não é automática, quer dizer, há pares de eventos  $E$  e  $F$  que não são independentes. Em tais casos, veja que

$$P(F|E) \neq P(F)$$

ou, o que é o mesmo,

$$P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F).$$

Para um exemplo, considere o experimento de lançar simultaneamente um dado verde e outro vermelho, ambos

não viciados, e observar os resultados. Nesse caso, o espaço amostral  $A$  é o conjunto dos pares  $(a, b)$ , com  $1 \leq a, b \leq 6$ , de forma que  $\#A = 6 \cdot 6 = 36$ . Em seguida, consideremos em  $A$  os dois eventos a seguir:

$E$ : a soma dos números dos dois dados é maior que 7;

$F$ : a soma dos números dos dois dados é par.

Os pares pertencentes ao evento  $E$  são  $(2, 6)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(6, 3)$ ,  $(6, 4)$ ,  $(6, 5)$  e  $(6, 6)$ , de forma que

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Os pares pertencentes ao evento  $F$  são  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(6, 4)$  e  $(6, 6)$ , de modo que

$$P(F) = \frac{\#F}{\#A} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Por fim, os pares pertencentes ao evento  $E \cap F$  são  $(2, 6)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(6, 4)$  e  $(6, 6)$ , logo,

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#A} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Então, temos que

$$P(E) \cdot P(F) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{4} = P(E \cap F),$$

de forma que  $E$  e  $F$  não são independentes.

Por outro lado, a probabilidade da soma dos números nos dois dados ser par sabendo-se que ela é maior que 7 é a probabilidade condicional  $P(F|E)$ , calculada como segue:

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}.$$

### 3 Exercícios

Nesta seção, exercitamos os conceitos discutidos nas duas seções anteriores examinando alguns exemplos interessantes.

**Exercício 2.** *uma sacola contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Retirando uma bola da sacola ao acaso, calcule a probabilidade do número da mesma ser divisível por 3 ou por 4.*

**Solução.** O espaço amostral relacionado ao problema é

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}.$$

Representando por  $E$  o evento “o número da bola ser divisível por 3” e por  $F$  o evento “o número da bola é divisível por 4”, queremos calcular  $P(E \cup F)$ .

Para tanto, observe que  $E = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ,  $F = \{4, 8, 12\}$  e  $E \cap F = \{12\}$ , de forma que

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{1}{3}, \quad P(F) = \frac{\#F}{\#S} = \frac{1}{5}$$

e

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#S} = \frac{1}{15}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

□

**Exercício 3.** Após uma análise meteorológica, descobriu-se que a probabilidade de chover no próximo sábado é  $\frac{1}{3}$  e de chover no próximo domingo é  $\frac{1}{4}$ . Supondo que a previsão para o sábado não afete nem seja afetada pela previsão para o domingo, calcule a probabilidade de chover em pelo menos um dia do final de semana.



**Solução.** Vamos primeiro calcular a probabilidade de não chover sábado (evento  $E$ ) e não chover domingo (evento  $F$ ).

Uma vez que a previsão para o sábado não afeta nem é afetada pela previsão para o domingo, concluímos que  $E$  e  $F$  são eventos independentes. Logo, a probabilidade de  $E \cap F$  (i.e., de não chover em dia algum do final de semana) é dada por

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, a probabilidade de chover em pelo menos um dia do final de semana é

$$P((E \cap F)^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

No próximo exercício, utilizaremos o fato de que se  $E$  e  $F$  são eventos independentes de um espaço amostral finito  $A$ , então  $E^c$  e  $F$  também são independentes (e, por conseguinte, o mesmo sucede com  $E^c$  e  $F^c$ ). Realmente, sendo  $E$  e  $F$  independentes, temos

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F).$$

Por outro lado, como

$$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F),$$

com

$$(E \cap F) \cap (E^c \cap F) = E \cap E^c \cap F = \emptyset,$$

a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos nos dá

$$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F),$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F) &= P(F) - P(E \cap F) \\ &= P(F) - P(E) \cdot P(F) \\ &= (1 - P(E))P(F) \\ &= P(E^c)P(F). \end{aligned}$$

**Exercício 4.** Um fábrica produz lâmpadas que têm  $\frac{1}{5}$  de probabilidade de queimar nos primeiros 100 dias de uso e  $\frac{1}{3}$  de probabilidade de queimar no período de 100 a 200 dias de uso. Admitindo que esses dois eventos (queimar nos primeiros 100 dias de uso e queimar no período de 100 a 200 dias de uso) sejam independentes, pede-se calcular a probabilidade da lâmpada não queimar nos 200 primeiros dias.



**Solução.** Para que a lâmpada não queime nos 200 primeiros dias de uso, devem ocorrer os eventos  $E^c$  e  $F^c$ , onde  $E$  e  $F$  são os eventos a seguir:

$E$ : queimar nos primeiros 100 dias.

$F$ : queimar no período de 100 a 200 dias.

As probabilidades de ocorrência dos eventos  $E^c$  e  $F^c$  são facilmente calculadas com o auxílio da fórmula para a probabilidade do evento complementar:

$$P(E^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad P(F^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como os eventos  $E$  e  $F$  são independentes por hipótese, a discussão anterior garante que o mesmo sucede com os eventos  $E^c$  e  $F^c$ . Portanto, a probabilidade buscada é

$$P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

□

Para calcular a probabilidade de um evento  $F$  que dependa de outro evento  $E$  (evidentemente, ambos no espaço amostral finito  $A$ ) é frequentemente útil notarmos que

$$F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c),$$

com

$$(F \cap E) \cap (F \cap E^c) = F \cap E \cap E^c = \emptyset.$$

Portanto, aplicando a fórmula para a probabilidade da união de dois eventos, obtemos

$$\begin{aligned} P(F) &= P((F \cap E) \cup (F \cap E^c)) \\ &= P(F \cap E) + P(F \cap E^c). \end{aligned}$$

No segundo membro da igualdade acima, substituindo as definições das probabilidades condicionais  $P(F|E)$  e  $P(F|E^c)$ ,

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \quad \text{e} \quad P(F|E^c) = \frac{P(F \cap E^c)}{P(E^c)},$$

obtemos a fórmula

$$P(F) = P(F|E) \cdot P(E) + P(F|E^c) \cdot P(E^c),$$

da qual faremos uso no próximo exercício.

**Exercício 5.** Uma sorveteria tem por meta vender pelo menos 100 picolés por dia. Se o dia for de sol, a probabilidade de bater a meta é de  $\frac{2}{3}$ ; se o dia for chuvoso, essa probabilidade é de apenas  $\frac{1}{4}$ . Sabe-se que a probabilidade de chuva para amanhã é de  $\frac{1}{5}$ . Qual é a probabilidade da sorveteria bater sua meta amanhã?



**Solução.** Considere os seguintes eventos:

$E$ : fazer sol amanhã;

$E^c$ : chover amanhã;

$F$ : bater a meta amanhã.

Pelo enunciado, temos imediatamente que  $P(E^c) = \frac{1}{5}$  e, daí,  $P(E) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ . Por outro lado, a probabilidade de bater a meta se o dia for de sol é a probabilidade condicional  $P(F|E)$ , ao passo que a probabilidade de bater a meta se o dia for chuvoso é a probabilidade condicional  $P(F|E^c)$ . Assim,

$$P(F|E) = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad P(F|E^c) = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a fórmula que precede o enunciado do exercício dá

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|E) \cdot P(E) + P(F|E^c) \cdot P(E^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

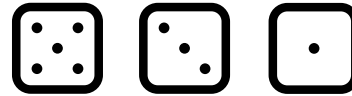
Observe que  $P(F|E) \neq P(F)$ , de forma que (como era razoável supor)  $E$  e  $F$  não são eventos independentes.  $\square$

Generalizando a definição de independência, dizemos que os eventos  $E$ ,  $F$  e  $G$  de um espaço amostral finito  $A$  são **independentes** se o forem dois a dois e, além disso,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G). \quad (3)$$

Observamos que é possível dar exemplo de eventos  $E$ ,  $F$  e  $G$  de um espaço amostral  $A$ , que sejam independentes dois a dois mas para os quais não valha a fórmula acima. Assim, ela realmente deve fazer parte da definição de independência de três eventos.

**Exercício 6.** Um dado honesto é lançado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados a seguir (em qualquer ordem)?



Vejamos duas soluções para esse exercício, a segunda das quais utiliza o conceito de independência para três eventos.

**Solução 1.** Primeiramente, consideremos como espaço amostral o conjunto  $A$  de todos os ternos  $(a, b, c)$  de inteiros tais que  $1 \leq a, b, c \leq 6$  de forma que a ordem dos resultados dos dados importe. Então, esse espaço amostral tem  $6 \times 6 \times 6 = 216$  elementos.

Dentre todos esses 216 resultados, apenas 6 nos interessam:  $(5, 3, 1)$ ,  $(5, 1, 3)$ ,  $(3, 1, 5)$ ,  $(3, 5, 1)$ ,  $(1, 5, 3)$  e  $(1, 3, 5)$ . Portanto, pela definição de probabilidade, temos

$$\frac{\#E}{\#A} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

$\square$

**Solução 2.** Observe que a probabilidade de qualquer resultado em um dado honesto é  $\frac{1}{6}$ . Considerando (como é razoável supor) os diferentes lançamentos do dado como eventos independentes, a probabilidade de obtermos o resultado  $(5, 3, 1)$ , nesta ordem, é

$$P(5, 3, 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

Agora, perceba que a ordem de ocorrência dos resultados 5, 3 e 1 não nos interessa, e que existe seis maneiras

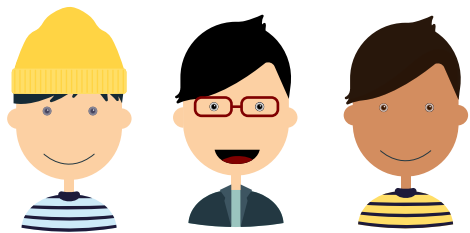
distintas de ordenar tais resultados. Também, para cada uma dessas seis ordenações, a probabilidade de obtenção do resultado correspondente continua sendo igual a  $\frac{1}{216}$ . Portanto, a probabilidade desejada é

$$P(5, 3, 1) + P(5, 1, 3) + P(3, 5, 1) + \\ + P(3, 1, 5) + P(1, 5, 3) + P(1, 3, 5) = 6 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{36}.$$

□

Vejamos mais um exemplo envolvendo a independência de três eventos.

**Exercício 7.** Arnaldo, Bernaldo e Ceraldo estão brincando de jogar dados. Arnaldo é o primeiro a jogar. Se o resultado for 6, ele vence. Caso contrário, será a vez de Bernaldo. Se o resultado obtido por Bernaldo for 6, ele vence. Caso contrário, será a vez de Ceraldo. Se o resultado obtido por Ceraldo for 6, ele vence. Caso contrário, o jogo termina sem vencedores. Admitindo que o dado com o qual eles estão brincando é honesto, calcule a probabilidade de Ceraldo ser o vencedor.



**Solução.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os eventos “Arnaldo tirou 6”, “Bernaldo tirou 6” e “Ceraldo tirou 6”, respectivamente.

Queremos calcular  $P(A^c \cap B^c \cap C)$ . Para tanto, observe, como o dado é honesto, o fato do resultado de um lançamento ser ou não 6 independe do lançador. Portanto, é razoável supor que os eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam independentes, com o que obtemos

$$P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C).$$

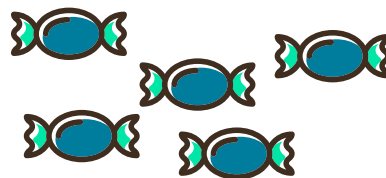
Como  $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  e, analogamente,  $P(B^c) = \frac{5}{6}$ ,  $P(C) = \frac{1}{6}$ , temos

$$P(A^c \cap B^c \cap C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}.$$

□

O próximo também envolverá três eventos, mas estes não serão independentes.

**Exercício 8.** Em uma cesta, temos oito bombons de morango, dez bombons de maracujá e quatro bombons de uva. Calcule a probabilidade de retirarmos sucessivamente três bombons de maracujá.



**Solução.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os eventos a seguir:

- $A$ : o primeiro bombom retirado é de maracujá.
- $B$ : o segundo bombom retirado é de maracujá.
- $C$ : o terceiro bombom retirado é de maracujá.

Queremos calcular a probabilidade  $P(A \cap B \cap C)$ . Para tanto, observe que

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B) \\ = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A). \quad (4)$$

Agora, como começamos com  $8 + 10 + 4 = 22$  bombons, 10 dos quais são de maracujá, temos que

$$P(A) = \frac{10}{22}.$$

Por outro lado, sendo o primeiro bombom retirado de sabor maracujá, restarão 21 bombons na cesta, 9 dos quais de maracujá; logo,

$$P(B|A) = \frac{9}{21}.$$

Por fim, se os dois primeiros bombons retirados foram de maracujá, restarão 20 bombons, sendo 8 de maracujá; logo,

$$P(C|A \cap B) = \frac{8}{20}.$$

Então,

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} = \frac{60}{385}.$$

□

## 4 Sugestões ao Professor

Separe de três a quatro encontros de 50 minutos cada para abordar os temas apresentados nesta aula. Na primeira aula, faça uma pequena revisão sobre probabilidade e introduza a fórmula da probabilidade da união utilizando o caderno de exercícios disponível no site do Portal da Matemática como material auxiliar. Na segunda aula, fale sobre eventos independentes e resolva exercícios específicos sobre o assunto. Na terceira aula, trate sobre probabilidade condicional. Tenha em mente que os assuntos propostos nesta aula são difíceis se forem tratados com a profundidade necessária e que mesmo os alunos mais experientes terão problemas para entender os conceitos em sua totalidade. Neste caso, recomendamos uma quarta aula de revisão.

Créditos pelas figuras:  
[www.freepik.com](http://www.freepik.com)