Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 1

Aplicações das Leis

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de março de 2021

Neste material, utilizaremos as *leis de limite* discutidas no material anterior para calcular alguns limites específicos importantes. Em particular, generalizaremos amplamente os exemplos 6 e 7 daquele material. Comecemos definindo um tipo importante de função.

Definição 1. *Uma* ***função polinomial*** *é uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *do tipo*

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

em que m *é um natural fixado e* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *são reais também fixados, sendo* $a_m \neq 0$.

Nas notações da definição anterior, o natural m é denominado o **grau** da função polinomial f.

Se $m = 1$ e fizermos $a_1 = a \neq 0$ e $a_0 = b$, temos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo

$$f(x) = ax + b$$

a qual é ordinariamente chamada uma **função afim**. Por outro lado, se $m = 2$ e denotarmos $a_2 = a \neq 0$, $a_1 = b$ e $a_0 = c$, temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

e usualmente dizemos que f é uma **função** (polinomial) **de segundo grau** ou, ainda, uma **função quadrática**.

Vemos, assim, que funções polinomiais generalizam classes de funções estudadas em grande detalhe nos ciclos Fundamental e Médio de ensino.

Assim como ocorre com funções afins e quadráticas, seria importante discutirmos o formato dos gráficos de funções polinomiais gerais, bem como procedimentos para encontrar, se houver, pontos de máximo ou mínimo de tais funções.

Faremos isto quando estudarmos *derivadas* e suas aplicações. Por ora, nos concentraremos no problema do cálculo de limites de funções polinomiais.

Nesse sentido, no material anterior mostramos, no Exemplo 8, que se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática, então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

isto é, que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Para funções polinomiais mais gerais, o resultado correspondente é o seguinte.

Proposição 2. *Dadas uma função polinomial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Prova. Suponhamos que

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que m é um natural fixado e $a_0, a_1, \ldots, a_m$ são reais também fixados, com $a_m \neq 0$.

No material anterior, mostramos (cf. relação (8)) que, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se

$$\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k. \tag{1}$$

Comentamos também que, para uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ fixado, vale a igualdade

$$\lim_{x \to x_0} cg(x) = c \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{2}$$

contanto que $\lim_{x \to x_0} g(x)$ exista.

Observamos, ainda (cf. relação (5)), que, dadas funções $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + \ldots + f_n(x)) = \\ &= \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} f_n(x), \end{aligned} \tag{3}$$

contanto que todos os limites do segundo membro existam.

Combinando adequadamente as relações (1), (2) e (3), calculamos $\lim_{x\to x_0} f(x)$ facilmente. Senão, vejamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} a_m x^m + \lim_{x\to x_0} a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_1 x \\
&\quad + \lim_{x\to x_0} a_0 \\
&= a_m \lim_{x\to x_0} x^m + a_{m-1} \lim_{x\to x_0} x^{m-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_0} x \\
&\quad + \lim_{x\to x_0} a_0 \\
&= a_m x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\
&= f(x_0).
\end{aligned}$$

□

A fim de generalizar a discussão acima de maneira adequada, precisamos discutir mais alguns conceitos e resultados.

Se $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial dada, uma **raiz** ou **zero** (real) de f é um real x_0 tal que $f(x_0) = 0$.

Graças ao fato de que $a_m \neq 0$, é possível mostrar que ***f*** **tem *no máximo m* raízes reais distintas**.

Por exemplo, já sabemos que funções de segundo grau têm no máximo 2 raízes reais distintas. Já para uma função de terceiro grau, digamos, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se x_0 for uma raiz real de f, então

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(x_0) \\
&= (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) \\
&= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) \\
&= a(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x - x_0)(x + x_0) \\
&\quad + c(x - x_0) \\
&= (x - x_0)\big(a(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x + x_0) + c\big) \\
&= (x - x_0)\big(ax^2 + (ax_0 + b)x + (ax_0^2 + bx_0 + c)\big) \\
&= (x - x_0)g(x),
\end{aligned}$$

em que $g(x) = ax^2 + (ax_0 + b)x + (ax_0^2 + bx_0 + c)$, uma função de segundo grau. Portanto,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)g(x) \Leftrightarrow x = x_0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Assim, como g, sendo de segundo grau, tem no máximo 2 raízes reais distintas (as quais podem ou não ser iguais a x_0), concluímos que f tem no máximo 3 raízes reais distintas (que seriam x_0 e 2 raízes reais distintas de g, as quais teriam de ser diferentes de x_0).

Dada uma função polinomial f, denotamos por $\mathcal{R}_f$ o conjunto de suas raízes reais. Vimos acima que, se f tiver grau m, então o conjunto $\mathcal{R}_f$ tem no máximo m elementos. Logo, seu complemento em $\mathbb{R}$, isto é, o conjunto $\mathbb{R} - \mathcal{R}_f$, é a união de no máximo $m + 1$ intervalos abertos.

A título de exemplo, se $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4$, então 1 é claramente uma raiz de f e, seguindo a discussão anterior, obtemos facilmente

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 4x - 4).$$

Uma vez que as raízes de $x^2 - 4x - 4$ são $2 \pm 2\sqrt{2}$, temos

$$\mathcal{R}_f = \{2 - 2\sqrt{2}, 1, 2 + \sqrt{2}\}$$

e, daí,

$$\begin{aligned}\mathbb{R} - \mathcal{R}_f = &(-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 - 2\sqrt{2}, 1)\\ &\cup (1, 2 + \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty).\end{aligned}$$

Estamos finalmente em condições de definir *funções racionais*. Em palavras, tais funções são *quocientes de duas funções polinomiais*. De maneira mais precisa, temos a seguinte

Definição 3. *Uma* ***função racional*** *é uma função do tipo*

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

em que m e n são naturais fixados e $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ são reais também fixados, sendo $a_m, b_n \neq 0$.

Na definição anterior, apesar de não termos explicitado o domínio de f a fim de chamar atenção para a fórmula que define $f(x)$, é agora fácil observar que tal domínio é $\mathbb{R} - \mathcal{R}_h$, em que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função polinomial dada por $h(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Em particular, para explicitar o domínio de uma função racional, temos de ser capazes de calcular as raízes da função polinomial do denominador.

O limite que queremos estabelecer generaliza a proposição anterior.

Proposição 4. *Dadas uma função racional $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, tem-se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Prova. Seja $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, em que $g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e $h(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, com $a_m, b_n \neq 0$.

Vimos, no item (b) da Proposição 5 do material anterior que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} g(x)}{\lim_{x \to x_0} h(x)}, \tag{4}$$

contanto que $\lim_{x \to x_0} g(x)$ e $\lim_{x \to x_0} h(x)$ existam, sendo este último diferente de 0.

Por outro lado, a suposição de que $x_0 \in D$, o domínio de f, garante que x_0 não é raiz de h, ou seja, $h(x_0) \neq 0$. Além disso, a proposição anterior dá

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0). \tag{5}$$

Combinando (4) e (5), obtemos por fim

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{g(x_0)}{h(x_0)} = f(x_0).$$

$\square$

Em exemplos numéricos, é um trabalho completamente mecânico calcular o limite de uma função polinomial ou o limite de um função racional em um ponto de seu domínio. Vejamos um

Exemplo 5. *Calcule* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+1}{x^3-5x^2+4}$.

Solução. Como $2^3 - 5\cdot 2^2 + 4 = -8 \neq 0$, temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+1}{x^3-5x^2+4} = \frac{2^2-4\cdot 2+1}{2^3-5\cdot 2^2+4} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}.$$

□

Se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ é uma função racional e $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz de h, pode ser que ainda possamos calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Contudo, certamente esse cálculo não dá $\frac{g(x_0)}{h(x_0)}$ como resposta, simplesmente pelo fato de que $h(x_0) = 0$ e não é possível dividir por 0.

Por exemplo, suponha que queiramos calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+4}.$$

A chave para fazê-lo é recordar que, *conceitualmente*, o limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

diz respeito ao comportamento de $f(x)$ *quando x se aproxima de x_0, mantendo-se diferente de x_0*. Assim, sendo, já vimos que $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ainda que exista, pode não ser igual a $f(x_0)$.

Isto posto, e voltando ao limite que desejamos calcular, perceba que 1 é raiz não só de x^3-5x^2+4, mas também de x^2-4x+3. Além disso, mostramos anteriormente que

$$x^3-5x^2+4 = (x-1)(x^2-4x-4),$$

e a teoria sobre trinômios de segundo grau garante que

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3).$$

Portanto, para $x \neq 1$, tem-se

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+4} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2-4x-4)} = \frac{x-3}{x^2-4x-4}.$$

Agora, note que 1 não é raiz de x^2-4x-4, o que nos permite utilizar o resultado da proposição anterior para calcular o limite desejado. Vejamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+4} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2-4x-4}\\ &= \frac{1-3}{1^2-4\cdot 1-4}\\ &= \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Para o próximo exemplo, sejam dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, um ponto $a \in I$ e uma função $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$, com $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Se $\ell > 0$, o lema de permanência do sinal, estudado no material anterior, garante que, diminuindo o intervalo I, se necessário, podemos supor que $f(x) > 0$ para $x \in I - \{a\}$.

Assumindo que este é o caso, o número $\sqrt{f(x)}$ tem sentido aritmético, de sorte que podemos considerar a função

$$x \in I - \{a\} \longmapsto \sqrt{f(x)}.$$

É possível mostrar que o limite

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$$

existe. Assumindo este fato, o resultado que nos interessa é a seguinte

Proposição 6. *Seja dada uma função $f : I - \{a\} \to [0, +\infty)$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, com $\ell > 0$, então*

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}.$$

Solução. Comecemos definindo a função $F : I - \{a\} \to [0, +\infty)$ por $F(x) = \sqrt{f(x)}$, e denotando

$$L = \lim_{x \to a} F(x).$$

Como $F(x) \geq 0$ para todo $x \in I - \{a\}$, aplicando novamente o lema de permanência do sinal concluímos que $L \geq 0$. Realmente, se fosse $L < 0$, então aquele resultado garantiria que deveríamos ter $F(x) < 0$ para $x \in I - \{a\}$ suficientemente próximo de a, o que não é o caso.

Por outro lado, uma vez que $F(x)^2 = f(x)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} F(x)^2 = \lim_{x \to a} F(x) \cdot \lim_{x \to a} F(x) \\ &= \left(\lim_{x \to a} F(x) \right)^2. \end{aligned}$$

Então, substituindo $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to a} F(x) = L$, obtemos a equação (em L)

$$\ell = L^2.$$

Como $L \geq 0$, a única solução possível é $L = \sqrt{\ell}$. Assim,

$$\lim_{x \to a} F(x) = L = \sqrt{\ell}.$$

$\square$

Combinando os resultados discutidos até aqui, agora é simples calcular um limite como

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 4}}.$$

Realmente, já vimos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{7} > 0.$$

Portanto, graças à proposição anterior, temos

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 minutos.

Para além dos resultados discutidos aqui, é importante que você proponha mais problemas envolvendo limites de funções polinomiais, racionais e raízes quadradas de funções com limites positivos, a fim de sedimentar, nos alunos, os conteúdos estudados.

Caso você não consiga elaborar alguns problemas nesse sentido, as sugestões de leitura complementar, listadas a seguir, trazem vários deles.

Uma vez mais, no momento da discussão das soluções, insista para que aqueles alunos que apresentarem soluções corretas venham à lousa, expô-las aos colegas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.