Material Teórico - Módulo Sistemas Lineares e Geometria Analítica

Sistemas com duas variáveis

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Sistemas com duas variáveis

Neste módulo, mostramos como interpretar geometricamente as soluções de sistemas lineares; nesta primeira aula, centraremos nossa atenção em sistemas de duas variáveis. Com algumas das ferramentas que já estudamos no módulo de Geometria Analítica e no módulo sobre Sistemas Lineares, o caso de duas variáveis torna-se bastante simples e o trataremos rapidamente.

Lembre-se de que uma equação do tipo $ax + by = c$, onde a e b não são ambos nulos (ou seja, $(a, b) \neq (0, 0)$), define uma reta no plano cartesiano xOy. Mais precisamente, o conjunto dos pontos (x, y) que são soluções dessa equação formam uma reta do plano. Considere, então, um sistema linear com duas equações e duas variáveis, na forma padrão:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Vamos assumir que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ e $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ (caso contrário, uma das equações poderia ser eliminada e poderíamos concluir que o sistema é impossível ou indeterminando, conforme estudamos no módulo sobre sistemas lineares). Sendo assim, cada equação do sistema determina uma reta no plano cartesiano; vamos chamá-las de r_1 e r_2, respectivamente.

Os pontos (x, y) do plano que são soluções do sistema são soluções de ambas as equações e, portanto, devem pertencer a ambas as retas. Por outro lado, no plano euclidiano há apenas três possíveis casos para as posições relativas de duas retas, quais sejam, elas podem ser: paralelas, coincidentes ou concorrentes (veja a Figura 1).

Estas três situações podem ser interpretadas como segue:

(a) Se r_1 e r_2 são concorrentes, então elas se intersectam em um único ponto. Neste caso, esse ponto é a única solução do sistema, o qual é possível e determinado.

(b) Se r_1 e r_2 são paralelas, então elas não possuem nenhum ponto em comum. Neste caso, não há soluções, e o sistema é impossível.

(c) Se r_1 e r_2 são coincidentes, ou seja, são a mesma reta, então qualquer ponto delas é uma solução do sistema. Neste caso, há infinitas soluções, e o sistema é possível e indeterminado.

Vamos chamar de θ_1 e θ_2 os ângulos que as retas r_1 e r_2, respectivamente, formam com o eixo horizontal (eixo-x), medidos no sentido anti-horário partindo do sentido positivo do eixo-x em direção a cada reta. Veja que, para cada $i \in \{1, 2\}$, temos $0° \leq \theta_i < 180°$. Lembre-se ainda, das aulas de Geometria Analítica, que se $b_i \neq 0$ então θ_i satisfaz $\operatorname{tg}(\theta_i) = -a_i/b_i$. Ademais, se $b_i = 0$, então, como $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$, temos que $a_i \neq 0$ e r_i é uma reta vertical (ou seja, $\theta_i = 90°$).

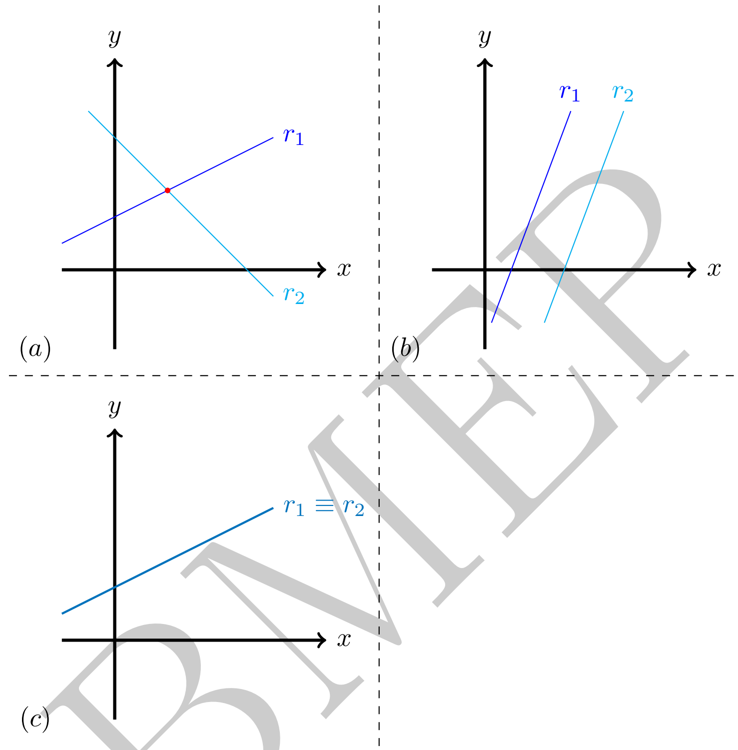

Figura 1: posições relativas de duas retas: (a) concorrentes, (b) paralelas, (c) coincidentes.

É claro que r_1 e r_2 são concorrentes se, e somente se, $\theta_1 \neq \theta_2$. Afirmamos agora que isso acontece se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Considere primeiro o caso em que $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$. Neste caso, uma vez que $0 \leq \theta_1 < 180°$ e $0 \leq \theta_2 < 180°$, temos

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 &\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\theta_1) \neq \operatorname{tg}(\theta_2) \\ &\Leftrightarrow \theta_1 \neq \theta_2. \end{aligned}$$

Resta tratar o caso em que $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$. Sem perda de generalidade, assuma que $b_1 = 0$. Neste caso, $\theta_1 = 90°$; ademais, a_1 tem que ser diferente de zero, pois $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$. Então, nessa situação,

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \Leftrightarrow b_2 \neq 0 \Leftrightarrow \theta_2 \neq 90°.$$

Logo, $\theta_1 \neq \theta_2$ se, e só se, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, o que prova a afirmação.

A discussão acima garante que os casos em que r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes acontecem exatamente quando

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{1}$$

Para distinguir entre qual desses dois casos acontece, basta observar que as retas serão coincidentes se, e só se, existir uma contante real não nula k tal que $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ e $c_1 = kc_2$, ou seja, tal que a primeira equação é obtida multiplicando-se a segunda equação por k. Se isso acontecer, não apenas a equação (1) será satisfeita, como também a equação $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. Reciprocamente, não é difícil mostrar que, se vale $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ e vale a equação (1), então existe uma constante k como acima.

Em resumo, concluímos que os casos (a)–(c) acima acontecem precisamente quando as retas correspondentes são:

(a) (Concorrentes) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

(b) (Paralelas) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ e $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$.

(c) (Coincidentes) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ e $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. Equivalentemente, existe $k \neq 0$ tal que $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ e $c_1 = kc_2$.

Por fim, veja que quando a_2, b_2 e c_2 são todos diferentes de zero, os casos acima podem ser reescritos de forma mais simples e natural:

(a) (Concorrentes) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

(b) (Paralelas) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

(c) (Coincidentes) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Exemplo 1. *São dadas, no plano cartesiano, as retas $5x - 7y = 32$ e $2x + 8y = 27$. Obtenha a equação da reta que forma um ângulo de $45°$ com o eixo horizontal (medido como no texto) e passa pelo ponto de interseção das duas retas dadas.*

Solução. Evidentemente, uma possível solução consiste em obter a solução (x_0, y_0) do sistema linear

$$\begin{cases} 5x - 7y = 32 \\ 2x + 8y = 27 \end{cases},$$

calculando em seguida a equação da reta desejada.

Alternativamente, observe que, para todo número real k, a reta de equação $5kx - 7ky = 32k$ também passa por (x_0, y_0), de sorte que o mesmo ocorre com a reta

$$(5k + 2)x + (-7k + 8)y = 32k + 27$$

(obtida somando membro a membro as igualdades $5kx - 7ky = 32k$ e $2x + 8y = 27$). Basta, então, escolher k de forma que

$$\frac{5k + 2}{7k - 8} = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Resolvendo a última equação acima, obtemos $k = 5$, de forma que a equação desejada é

$$(5 \cdot 5 + 2)x + (-7 \cdot 5 + 8)y = 32 \cdot 5 + 27,$$

ou ainda

$$27x - 27y = 187.$$

□

Dicas para o Professor

Esta material pode ser apresentado em conjunto com o material seguinte, sobre sistemas de três variáveis. O conteúdo conjunto pode ser coberto em duas aulas de 50 min.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. Tópicos de Matemática Elementar, vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.

2. E. L. Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

3. E. L. Lima. Meu Professor de Matemática e outras histórias, sexta edição, Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.