Material Teórico - Módulo Operações Básicas

Desenvolvimento do sistema de numeração

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de outubro de 2023

Portal da Matemática
OBMEP

1 Desenvolvimento do sistema de numeração

Sugerimos que o leitor leia também o material teórico disponível na primeira seção do módulo "Números naturais: representação e operações básicas". Tal material cobre tanto o conteúdo dos 2 primeiros vídeos de tal módulo como o conteúdo dos 2 vídeos da seção atual ("Desenvolvimento do sistema de numeração") do módulo atual ("Operações básicas").

Os vídeos da seção atual centram a atenção em contar a história do desenvolvimento dos sistemas de numeração modernos, passando pelos métodos utilizados por civilizações antigas, como os povos babilônicos, até chegar à representação que utilizamos hoje, o sistema decimal com algarismos hindu-arábicos (ou indo-arábicos). Por outro lado, os vídeos da primeira seção do módulo "Números naturais: representação e operações básicas" trazem uma discussão sobre como os números naturais são representados atualmente e quais as vantagens dessa representação em relação à utilização de algarismos romanos.

Aqui, trazemos apenas uma breve revisão do que será necessário para as próximas seções.

1.1 Representação dos números naturais

O conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, corresponde[1] aos números não negativos associados a valores inteiros: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Para adicionar dois números de forma sistemática, devemos, antes de tudo, ter uma maneira eficiente para representá-los. Fazemos isso utilizando o *sistema de numeração decimal*, o qual permite representar todos os números naturais 0, 1, 2,

[1]Cumpre observar que a escolha de incluir o zero como número natural é *arbitrária*, ou seja, poderíamos excluí-lo do conjunto dos naturais sem prejuízo para o desenvolvimento da Matemática. A esse respeito, veja também a seção "Dicas para o Professor".

3, …, 9, 10, 11, … com *numerais* formados a partir de dez símbolos, os *algarismos decimais* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O sistema de numeração *decimal* tem esse nome por usar apenas dez algarismos e é *posicional* porque o valor de um algarismo em um dado número *depende de sua posição*. Assim, no numeral 343, o algarismo 3 à direita representa três unidades e o mesmo algarismo 3, agora à esquerda, representa trezentas unidades (três centenas). Logo,

$$343 = 300 + 40 + 3 = 3\times100 + 4\times10 + 3.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}34343 &= 30000 + 4000 + 300 + 40 + 3\\ &= 3\times10000 + 4\times1000 + 3\times100 + 4\times10 + 3.\end{aligned}$$

Podemos expressar melhor as decomposições acima usando potências de 10, em que, por convenção,

$$\begin{aligned}10^0 &= 1,\\ 10^1 &= 10,\\ 10^2 &= 100,\\ 10^3 &= 1000,\\ 10^4 &= 10000,\end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}343 &= 3\times10^2 + 4\times10^1 + 3\times10^0,\\ 34343 &= 3\times10^4 + 4\times10^3 + 3\times10^2 + 4\times10^1 + 3\times10^0.\end{aligned}$$

Para facilitar a leitura de numerais grandes, eles são divididos em classes de três algarismos que, a partir da direita, são denominadas de classes das unidades, milhares, milhões, bilhões, etc. Por sua vez, cada classe é dividida em três ordens, a saber, unidades, dezenas e centenas. Assim, o numeral

$$23.145.207$$

corresponde a duas dezenas de milhão, três unidades de milhão, uma centena de milhar, quatro dezenas de milhar, cinco unidades de milhar, duas centenas e sete unidades.

Classe dos Milhões			Classe dos Milhares			Classe das Unidades Simples		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centena de Milhão	Dezena de Milhão	Unidade de Milhão	Centena de Milhar	Dezena de Milhar	Unidade de Milhar	Centena	Dezena	Unidade

2 Exercícios resolvidos

Exemplo 1. *Como alguém pode pagar uma conta de* R$ 1327,00 *a um comerciante que não dispõe de troco, utilizando* 14 *notas de* R$ 100,00*,* 9 *cédulas de* R$ 10,00 *e* 9 *moedas de* R$ 1,00*?*

Solução. Para pagar uma conta de R$ 1327,00 nas condições acima, devemos usar 13 notas de R$ 100,00, pois 14 notas de R$ 100,00 inteiram um valor maior que a quantia devida, enquanto 12 notas de R$ 100,00 deixam um débito de R$ 127,00, que deve ser coberto por cédulas e moedas de R$ 10,00 e R$ 1,00, respectivamente, cujo valor total (em nosso caso) é de apenas R$ 99,00. Como as 13 notas de R$ 100,00 valem R$ 1300,00, ficam faltando R$ 27,00 para quitar a dívida. Com um argumento similar ao utilizado acima, esses 27 reais devem ser pagos com duas cédulas de R$ 10,00 e sete moedas de R$ 1,00. □

Exemplo 2. *Em qual das alternativas abaixo o algarismo 5 do número listado tem o valor de 500 unidades?*

a) 135.120*;*

b) 5.210*;*

c) 20.501*;*

d) 25.100.

Solução. Percorrendo os algarismos de um número a partir da direita, o algarismo 5 tem o valor de 5 unidades quando está na primeira posição, de 50 unidades quando ocupa a segunda posição, de 500 unidades quando se encontra na terceira posição, e assim por diante. Logo a alternativa que apresenta um número em que o algarismo 5 vale 500 unidades é a letra c). □

Dicas para o Professor

Sempre surgem alunos com dúvidas sobre o fato do número zero ser considerado ou não um número natural. Vale observar que alguns livros incluem o número zero no conjunto dos naturais e outros não, o que pode aumentar a confusão. O padrão, ISO 80000-2 define $\mathbb{N}$ como o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ou seja, inclui-se o zero), e essa é uma decisão bastante comum em livros de Álgebra, pelo desejo da adição possuir um *elemento neutro*.

Porém, observamos que os números positivos são utilizados pelas civilizações há muito mais tempo do que o número zero. O primeiro uso documentado do número zero ocorre apenas no ano 628 depois de Cristo, no trabalho do matemático indiano Brahmagupta, onde ele trata zero como um numeral e discute suas propriedades aritméticas (soma, subtração, multiplicação e divisão por outros números). Não devemos confundir esse tipo de uso com o fato de que, bem antes disso, já nas antigas Babilônia e Egito, o símbolo zero era utilizado, mas apenas como marcador em sistemas posicionais. Ou seja, ele não era percebido como um número. Ademais, o número zero não representa uma quantidade de objetos, mas a ausência de quantidade.

Assim, livros que consideram uma perspectiva histórica ou focam em problemas de contagem, tendem a não incluir o zero, ou seja, definem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Observamos que essa escolha é mais condizente com a expressão *números naturais* para significar números que representam resultados de contagens de quantidades.

É importante salientar que a escolha entre uma opção ou outra é apenas um convenção e não há um consenso. Isso porque não há um motivo óbvio para todos escolherem uma via ou a outra. O mais importante é que, uma vez tomada essa escolha, o livro (ou professor) mantenha sua decisão ao longo de todo o texto (ou sequência de aulas), para não gerar confusão. Para o aluno, é importante conhecer a decisão tomada pela autor.