# Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

## Relações entre Coeficientes e Raízes - Parte I

### Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1º de Setembro de 2025

Dando continuidade ao estudo de equações do segundo grau, discutiremos duas relações importantes entre suas raízes (quando estas forem reais) e seus coeficientes. Ainda supondo que existam raízes reais, veremos outras formas comuns de escrever a equação, bem como alguns problemas nos quais o objetivo maior não é simplesmente resolver a equação, mas fazer uso das relações mencionadas acima.

# 1 Relações entre coeficientes e raízes

Além da fórmula de Bhaskara, as duas relações mais importantes e famosas sobre equações de segundo grau são as *fórmulas para a soma e para o produto de suas raízes em função de seus coeficientes*. Deduziremos tais fórmulas nesta seção. Para tanto, comecemos recordando alguns fatos colecionados no material anterior.

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$. Lembre-se de que $\Delta = b^2 - 4ac$ é seu discriminante e que, quando $\Delta < 0$, ela não possui raízes reais. Assim, daqui em diante assumiremos que $\Delta \geq 0$, e denotaremos por $x_1$ e $x_2$ as raízes (reais) da equação, obtidas pela fórmula de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{1}$$

No caso em que $\Delta > 0$, os números $x_1$ e $x_2$ são raízes distintas da equação. No caso em que $\Delta = 0$, os valores de $x_1$ e $x_2$ são iguais. Nesse caso, conforme já mencionamos no material da aula anterior, *convencionamos* dizer que esse valor comum é uma *raiz dupla*, ou uma *raiz de multiplicidade dois* ou, ainda, que *a equação tem duas raízes iguais*. Com isso em mente, ao usarmos a expressão "soma das raízes" nos referiremos sempre ao valor da soma $x_1 + x_2$, mesmo no caso em que $x_1 = x_2$. De outra forma, a soma é feita *considerando a multiplicidade das raízes*, e uma raiz dupla contribui para a soma duas vezes. Analogamente, o "produto das raízes" sempre se referirá ao número $x_1 x_2$.

De posse das convenções acima, para obter a soma das raízes basta somar membro a membro as igualdades em (1):

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{(-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}) + (-b-\cancel{\sqrt{\Delta}})}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, para obter o produto das raízes, basta multiplicar membro a membro as igualdades em (1) e usar o produto notável da soma pela diferença de dois números para facilitar os cálculos:

$$
\begin{aligned}
x_1 x_2 &= \Big(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Big)\Big(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Big) \\
&= \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\
&= \frac{\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

A seguir, resumimos os cálculos acima:

| |
|---|
| Se $a \neq 0$ e a equação $ax^2+bx+c=0$, tiver raízes reais, possivelmente iguais, então sua soma vale $-b/a$ e seu produto vale $c/a$. |

Essas relações são conhecidas como as **fórmulas de Viéte**, em homenagem ao matemático francês François Viète (1540-1603), seu descobridor. Nelas, fique atento ao sinal negativo na expressão para a soma das raízes e positivo na expressão para o produto das mesmas!

**Observação 1.** Quando você estudar números complexos, verá (no módulo *Equações Algébricas-Propriedades das Raízes*, do Terceiro Ano do Ensino Médio) que as fórmulas de Viète continuam válidas quando considerarmos as raízes *complexas* de uma equação de segundo grau, desde que levemos em conta suas multiplicidades.

**Exemplo 2.** *Encontre a soma e o produto das raízes de cada uma das seguintes equações de segundo grau:*

(*a*) $3x^2 + 11x + 7 = 0.$

(*b*) $x^2 - 6x + 9 = 0.$

(*c*) $x^2 - 12x = 0.$

(*d*) $16 - 4x - x^2 = 0.$

**Solução.**

(a) Aqui, $a = 3$, $b = 11$ e $c = 7$, de forma que obtemos diretamente que a soma das raízes é $-b/a = -11/3$ e o produto é $c/a = 7/3$. Veja que isso é bem mais rápido do que se tivéssemos primeiro que calcular cada uma das raízes para, depois, efetuar suas soma e produto.

(b) Como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$, a soma das raízes é $-(-6)/1 = 6$ e o produto é $9/1 = 9$. Este item merece que discutamos um pouco mais o resultado obtido. Veja que, aqui, temos $\Delta = 0$ e, usando a fórmula de Bhaskara, vemos que 3 é uma raiz dupla. Por isso, a soma das raízes (com multiplicidade) é igual a $3+3 = 6$, enquanto o produto é igual a $3 \cdot 3 = 9$.

(c) Note que $a = 1$, $b = -12$ e $c = 0$. Nesse caso, a soma das raízes é $-(-12)/1 = 12$ e produto é $0/1 = 0$. De fato, as raízes são 0 e 12.

(d) Cuidado, pois, a equação está escrita em uma ordem não usual: veja que $a = -1$, $b = -4$ e $c = 16$. Sendo assim, a soma das raízes é $-(-4)/(-1) = -4$ e o produto é $16/(-1) = -16$.

$\square$

Voltando à equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, veja que, como $a \neq 0$, temos a seguinte equivalência:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, denotando por $S$ e $P$, respectivamente, o valor da soma e do produto das raízes, temos $S = -b/a$ e $P = c/a$, de sorte que a última equação acima pode ser escrita como:

$$x^2 - Sx + P = 0. \tag{2}$$

Essa maneira de "*ver*" a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é bastante útil se quisermos tentar encontrar suas raízes "*por inspeção*", isto é, sem utilizar a fórmula de Bhaskara.

Por exemplo, para encontrar as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, basta (de acordo com (2)) procurarmos dois números reais cuja soma seja igual a 5 e cujo produto seja igual a 6. Após um momento de reflexão (e algumas tentativas e erros), percebemos que os números procurados são 2 e 3, de forma que esses dois números são as raízes da equação. É claro que esse método não é muito útil se os coeficientes forem muito grandes ou se as raízes não forem números inteiros. Por outro lado, lembre-se de que, mesmo quando as raízes forem números inteiros, estes podem ser positivos ou negativos.

**Exemplo 3.** *Sabendo que as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$ são números inteiros, encontre-as sem usar a fórmula de Bhaskara.*

**Solução.** Veja que a soma das raízes é igual a $-2$ e seu produto é igual a $-15$. Como o produto é negativo e as raízes são reais, uma delas deve ser positiva e a outra negativa. Ademais, ambas pertencem ao conjunto dos divisores de 15: $\{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\}$. Uma análise de casos mostra que, para a soma ser $-2$ e o produto ser $-15$, as raízes precisam ser $-5$ e 3. $\square$

A equação (2) também pode ser utilizada para solucionar o seguinte *problema inverso*: dados dois números reais, encontrar uma equação de segundo grau que tenha esses dois números por raízes[1].

**Exemplo 4.** *Escreva uma equação de segundo grau que tenha como raízes os número* $-20$ *e* $4$*.*

**Solução.** A soma das raízes deve ser $S = (-20) + 4 = -16$ e o produto deve ser $P = (-20) \cdot 4 = -80$. Assim, uma equação que resolve o problema é $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x^2 - (-16)x + (-80) = 0$. Simplificando, obtemos:

$$x^2 + 16x - 80 = 0.$$

$\square$

**Observação 5.** A solução do problema anterior não é única. De fato, há infinitas outras equações de segundo grau que também têm os números $-20$ e $4$ como raízes. Por exemplo, $2x^2 + 32x - 160 = 0$ é uma delas. Em geral, basta multiplicar os dois lados de $x^2 + 16x - 80 = 0$ por qualquer número real diferente de zero. Além disso, poderíamos reordenar os termos, passá-los de um lado para o outro (claro, invertendo seus sinais!), fatorar um dos lados da equação, etc. Por outro lado, a solução que obtivemos é a única no formato $x^2 - Sx + P = 0$.

A comparação entre as duas soluções que apresentaremos ao próximo exemplo deixa muito clara a vantagem da utilização das fórmulas de Viète.

**Exemplo 6.** *Sendo* $u$ *e* $v$ *as raízes da equação*

$$x^2 - 5x + 3 = 0,$$

*escreva uma equação de segundo grau cujas raízes sejam* $u+1$ *e* $v+1$*.*

[1] Observe que pelo recurso a esse problema inverso é que seu professor consegue criar rapidamente uma equação de segundo grau para a qual ele já conhece as soluções.

**Solução 1.** Note que a equação do enunciado já está no formado $x^2 - Sx + P = 0$ (em particular, atente para o fato de que o coeficiente de $x^2$ é igual a 1). Sendo assim, a soma das raízes é $u + v = 5$ e o produto delas é $uv = 3$.

Para construir uma equação com raízes $u + 1$ e $v + 1$, basta ver que:

$$(u + 1) + (v + 1) = (u + v) + 2 = 7$$

e

$$(u + 1)(v + 1) = uv + (u + v) + 1 = 3 + 5 + 1 = 9.$$

Assim, uma equação que satisfaz o enunciado é:

$$x^2 - 7x + 9 = 0.$$

□

**Solução 2.** O discriminante da equação $x^2 - 5x + 3 = 0$ é $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$, logo, suas raízes são

$$u = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{5 - \sqrt{13}}{2};$$

assim,

$$u + 1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad v + 1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}.$$

Denotando $S' = (u + 1) + (v + 1)$ e $P' = (u + 1)(v + 1)$, temos

$$S' = \frac{7 + \cancel{\sqrt{13}}}{2} + \frac{7 - \cancel{\sqrt{13}}}{2} = 7$$

e

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right) \\ &= \frac{7^2 - \sqrt{13}^2}{4} = \frac{49 - 13}{4} = 9. \end{aligned}$$

De acordo com (2) (com $S'$ no lugar de $S$ e $P'$ no lugar de $P$), vemos que a equação de segundo grau cujas raízes são $u+1$ e $v+1$ é $x^2 - S'x + P' = 0$, ou seja:

$$x^2 - 7x + 9 = 0.$$

□

**Exemplo 7.** *Indique qual das equações abaixo possui como raízes os números $x_1 = 3$ e $x_2 = 1/3$:*

$(a)$ $3x^2 + 10x + 3 = 0.$

$(b)$ $-3x^2 + 10 + 3 = 0.$

$(c)$ $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0.$

$(d)$ $-x^2 + \frac{10}{3}x - 1 = 0.$

**Solução.** Como $x_1 + x_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ e $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, segue de (2) que uma equação possível é:

$$x^2 - \frac{10x}{3} + 1 = 0.$$

Observe que, multiplicando essa equação por $-1$, obtemos a equação do item (d). Além disso, nenhum dos demais itens resolve o problema; de fato, as equações dos itens (a) e (c) não servem, pois ambas possuem como soma de suas raízes o número $-10/3$; o item (b) também não é solução, pois possui como produto de suas raízes o número $3/(-3) = -1$.

Portanto, a resposta correta é o item (d). □

**Exemplo 8.** *Resolva o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 20 \\ u + v = 6. \end{cases}$$

**Solução.** Inicialmente, a ideia é usar as equações dadas para obter um sistema da forma

$$\begin{cases} uv = P \\ u + v = 6, \end{cases}$$

o qual já sabemos (por (2)) resolver: $u$ e $v$ serão as raízes da equação de segundo grau

$$x^2 - Px + 6 = 0.$$

Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} 2uv &= (u+v)^2 - (u^2+v^2) \\ &= 6^2 - 20 = 16, \end{aligned}$$

logo, $uv = 8$. Dessa forma, $u$ e $v$ são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Tais raízes são 2 e 4, de forma que $u = 2$ e $v = 6 - 2 = 4$, ou $u = 4$ e $v = 6 - 4 = 2$. □

A seguir, temos um exemplo mais sofisticado de aplicação das fórmulas de Viète, retirado da referência [1] e que foi proposto numa das edições da Olimpíada Cearense de Matemática (OCM), para o Ensino Fundamental.

**Exemplo 9** (OCM). *Sejam $p$ e $q$ reais dados. Se as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$ forem reais, positivas e distintas, mostre que o mesmo ocorre com as raízes da equação $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p) = 0$.*

**Prova.** Note inicialmente que $q \neq 0$, pois do contrário a equação $x^2 + px + q = 0$ se reduziria a $x^2 + px = 0$ e, daí, teria uma raiz igual a 0, contradizendo nossas hipóteses.

Agora, sejam $\Delta$ e $\Delta'$ os discriminantes dos trinômios $x^2 + px + q = 0$ e $qx^2 + (p - 2q)x + (1 - p)$, respectivamente. Mostremos primeiro que $\Delta' > 0$, o que garantirá que as raízes da segunda equação também são reais e distintas.

Como a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais e distintas, temos $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta' &= (p - 2q)^2 - 4q(1 - p) \\ &= p^2 - 4q + 4q^2 \\ &= \Delta + 4q^2 > 0. \end{aligned}$$

Para mostrar que as raízes de $qx^2+(p-2q)x+(1-p)=0$ são positivas, basta mostrarmos que a soma $S'$ e o produto $P'$ das mesmas são ambos positivos (pois essa é a única maneira de dois números reais terem soma e produto positivos). Ora, uma vez que as raízes da equação $x^2+px+q=0$ são positivas, as fórmulas de Viète garantem que $-p>0$ e $q>0$. Portanto, novamente por elas, temos

$$S' = \frac{2q-p}{q} = 2 + \frac{-p}{q} > 0$$

e

$$P' = \frac{1-p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{-p}{q} > 0.$$

$\square$

## 2 A forma fatorada de um trinômio de segundo grau

Substituindo $S$ por $x_1+x_2$ e $P$ por $x_1x_2$ em (2) e fatorando a expressão obtida, obtém-se uma terceira maneira de expressar nossa equação original $x^2-Sx+P=0$. Vejamos:

$$\begin{aligned} x^2 - Sx + P = 0 &\iff x^2 - (x_1+x_2)x + (x_1x_2) = 0 \\ &\iff x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0 \\ &\iff x(x-x_1) - x_2(x-x_1) = 0 \\ &\iff (x-x_1)(x-x_2) = 0. \end{aligned}$$

A expressão $(x-x_1)(x-x_2)=0$ é conhecida como a **forma fatorada** da equação de segundo grau.

Recorde que o produto de dois números reais é zero se e só se um deles for zero. Logo, a igualdade acima acontece se e só se $x-x_1=0$ ou $x-x_2=0$, ou seja, quando $x=x_1$ ou $x=x_2$ (como era esperado, já que estas são as únicas raízes da equação original).

De modo mais geral, uma expressão do tipo $ax^2+bx+c$, pode ser escrita como $a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$ que, por sua vez, pode ser fatorada como $a(x - x_1)(x - x_2)$, onde $x_1$ e $x_2$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (3)$$

**Exemplo 10.** *Encontre a forma fatorada dos trinômios de segundo grau* $x^2 - 8x + 15$ *e* $x^2 + 2x - 15$.

**Solução.** Inicialmente, observe que a equação de segundo grau $x^2 - 8x + 15 = 0$ tem raízes 3 e 5 (pois $3 + 5 = 8$ e $3 \cdot 5 = 15$). Então, (3) dá

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5).$$

Da mesma forma, procurando dois inteiros com soma $-2$ e produto $-15$, encontramos (possivelmente após alguma tentativa e erro) 3 e $-5$. Portanto, essas são as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$, de sorte que, aplicando novamente (3), obtemos

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x - (-5)) = (x - 3)(x + 5).$$

□

A discussão que levou a (3) deixa claro que

$$x^2 + (y + z)x + yz = (x + y)(x + z).$$

Tal fatoração é (com justiça!) conhecida como a **identidade de Viète** e, por vezes, é útil em problemas envolvendo produtos notáveis. Vejamos dois exemplos.

**Exemplo 11.** *Encontre todos os inteiros* $y$ *e* $z$ *tais que*

$$y + z + yz = 100.$$

**Solução.** Fazendo $x = 1$ na identidade de Viète, obtemos

$$1 + y + z + yz = (1 + y)(1 + z);$$

então, somando 1 a ambos os membros da equação do enunciado, obtemos

$$(1 + y)(1 + z) = 101.$$

Como $101 < 121 = 11^2$, temos $\sqrt{101} < 11$; então, pelo *crivo de Eratóstenes* (veja a vídeo-aula e o material sobre números primos, no 6º ano do Ensino Fundamental), ou 101 é primo ou possui um fator primo menor que 11. Nesse último caso, 101 seria divisível por um dos números 2, 3, 5 ou 7, o que não é o caso; portanto, 101 é primo.

Assim, as únicas maneiras de termos $(1+y)(1+z) = 101$ são as listadas abaixo:

$$\begin{cases} 1+y=1 \\ 1+z=101 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1+y=101 \\ 1+z=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 1+y=-1 \\ 1+z=-101 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1+y=-101 \\ 1+z=-1 \end{cases},$$

as quais dão as soluções $(y,z) = (0,100), (100,0), (-2,-102), (-102,-2)$. $\square$

O próximo exemplo é mais difícil e utiliza a identidade de Viète como *pista* para encontrar uma solução.

**Exemplo 12.** *Mostre que, para todos os reais $x$, $y$, $z$, tem-se*

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z) + y^2z^2 \geq 0.$$

**Solução.** A presença do produto $(x+y)(x+z)$ sugere pensar na identidade de Viète, especialmente quando vemos que $x(x+y+z) = x^2+(y+z)x$. Juntando essas duas observações, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&4x(x+y)(x+z)(x+y+z) = \\
&= 4(x+y)(x+z)x(x+y+z) \\
&= 4\big(x^2+(y+z)x+yz\big)\big(x^2+(y+z)x\big) \\
&= 4\big(\underbrace{x^2+(y+z)x}_{:=u}+yz\big)\big(x^2+(y+z)x\big) \\
&= 4(u+yz)u \\
&= 4u^2+4u(yz).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2=\\
&=4u^2+4u(yz)+(yz)^2\\
&=(2u+yz)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

□

## Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja tratado em dois encontros de 50 minutos e que, além disso, seja dedicado outro encontro para a resolução de exercícios mais avançados. O Caderno de Exercícios deste módulo, em especial, possui uma grande quantidade de exercícios já resolvidos e que *não são* meras aplicações da fórmula de Bhaskara.

Fórmulas para a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial de grau qualquer também são conhecidas. Para um polinômio $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$, a soma das raízes de $p(x) = 0$ é igual a $-a_{n-1}/a_n$, enquanto o produto das raízes é igual a $(-1)^n a_0/a_n$. Existem, ainda, relações dos demais coeficientes com outras somas de produtos das raízes. Tais relações, são conhecidas como as *relações de Girard-Viète* e generalizam as relações de Viète aqui discutidas.

A referência [1] discute equações de segundo grau exaustivamente. A referência [2] discute números complexos e equações polinomiais de graus quaisquer, também exaustivamente.



## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2024.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*, segunda edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.