Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

MDC e MMC - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Mínimo múltiplo comum

Continuando nossa aula, vamos estudar o mínimo múltiplo comum de um conjunto finito de números naturais.

Consideremos os números naturais não nulos $a_1, a_2, \ldots, a_l$, ou seja, tais que nenhum deles é igual a zero. O **mínimo múltiplo comum** (abreviamos **MMC**) dos números $a_1, a_2, \ldots, a_l$ é o menor número natural não nulo m que é múltiplo de todos esses números, ou seja, m satisfaz as duas condições abaixo:

(1) $m \neq 0$ é múltiplo de $a_1, a_2, \ldots, a_l$;

(2) Se $m' \neq 0$ é múltiplo de $a_1, a_2, \ldots, a_l$, então $m \leq m'$.

Exemplo 1. *Os múltiplos de* 15 *são os números* 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105 *etc, e os múltiplos de* 21 *são os números* 0, 21, 42, 63, 84, 105 *etc. Observando as duas listas de múltiplos, vemos que o menor elemento pertencente a ambas é* 105*. Logo,* 105 *é o MMC de* 15 *e* 21*.*

Generalizando a ideia do exemplo 1, consideremos, para cada n natural, o conjunto $M(n)$ dos múltiplos de n, ou seja,

$$M(n) = \{0, n, 2n, 3n, 4n, \ldots\}.$$

Para $a_1, a_2, \ldots, a_l$ naturais não nulos, o conjunto

$$M(a_1) \cap M(a_2) \cap \cdots \cap M(a_l) \qquad (1)$$

é formado pelos número naturais que são simultaneamente múltiplos de todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Esse conjunto não é vazio, porque o produto $a_1 a_2 \ldots a_l$ é um múltiplo comum dos números a_1, a_2, $\ldots$, a_l. Como todos esses números são diferentes de zero, seu produto também o é; logo, a interseção em (1), além de não vazia, possui elementos diferentes de zero.

Observação 2. *A razão pela qual supusemos que os números a_1, a_2, $\ldots$, a_l fossem todos diferentes de zero é que, se um deles fosse igual a zero, então a interseção em (1) seria o conjunto $\{0\}$. De fato, isso decorre de que $M(0) = \{0\}$. Assim, se um dos números a_1, a_2, $\ldots$, a_l fosse igual a* 0*, não seria possível encontrar um número $m \neq 0$ satisfazendo as condições da definição de MMC.*

O fato destacado a seguir garante a existência do MMC:

Todo subconjunto não vazio S do conjunto dos números naturais não nulos, admite um elemento mínimo.

Essa afirmação é chamada *princípio da boa ordem* e é um dos fatos básicos sobre os quais se apoia toda a aritmética. No nosso caso, sendo S o conjunto formado pelos elementos não nulos de $M(a_1) \cap M(a_2) \cap \cdots \cap M(a_l)$, temos que S é não vazio, porque o produto $a_1 a_2 \ldots a_l$ pertence a S. Assim, pelo princípio da boa ordem, S possui um elemento mínimo, quer dizer, existe um menor número natural não nulo que está na interseção $M(a_1) \cap M(a_2) \cap \cdots \cap M(a_l)$. De uma outra forma, esse elemento mínimo de S é o menor múltiplo de todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_l$. Assim, o MMC de uma lista de números não nulos **existe** e, portanto, é um conceito que faz sentido ser considerado.

Se m_1 e m_2 satisfazem as condições (1) e (2) da definição de MMC, então, aplicando a condição (2) com m_1 no lugar de m e m_2 no lugar de m', concluímos que $m_1 \leq m_2$. Analogamente, também temos $m_2 \leq m_1$. Logo, $m_1 = m_2$, ou seja, o MMC de uma lista de números não nulos **é único**.

Usamos a notação $\operatorname{mmc}(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ para indicar o MMC dos números naturais não nulos $a_1, a_2, \ldots, a_l$.

Assim como fizemos para o MDC, vamos, agora, exibir alguns métodos para o cálculo do MMC de um conjunto de números naturais não nulos.

Primeiro método: listagem de múltiplos. Esse método é o que utilizamos no exemplo 1. Listamos os múltiplos de cada um dos números dados e procuramos identificar o menor número que é múltiplo de todos, isto é, que pertence a todas as listas de múltiplos. Os argumentos expostos anteriormente garantem que esse método funciona, pois o MMC de uma lista de números naturais não nulos existe e é único. No entanto, esse método pode ser muito trabalhoso se tivermos que lidar com números grandes.

Exemplo 3. *Para calcular* $\operatorname{mmc}(35, 231)$*, listamos primeiro os múltiplos de* 35 *e* 231*:*

$$\begin{aligned} M(35) = \{&0, 35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350,\\ &385, 420, 455, 490, 525, 560, 595, 630, 665, 700,\\ &735, 770, 805, 840, 875, 910, 945, 980, 1015, 1050,\\ &1085, 1120, \underline{1155}, 1190, 1225, \ldots\}\end{aligned}$$

e

$$M(231) = \{0, 231, 462, 693, 924, \underline{1155}, \ldots\}$$

À exceção do zero, o número 1155*, sublinhado nas duas listas, é o primeiro que aparece em ambas. Logo, ele é o menor múltiplo comum de* 35 *e* 231*, ou seja,* $\operatorname{mmc}(35, 231) = 1155$.

O primeiro método também funciona quando queremos calcular o MMC de mais de dois números.

Exemplo 4. *Vamos calcular o MMC de* $10, 15$ *e* 21*.*

$$M(10) = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120,$$
$$130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, \underline{210}, \ldots\}$$
$$M(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165,$$
$$180, 195, \underline{210}, \ldots\}$$
$$M(21) = \{0, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, \underline{210}, \ldots\}$$

Logo, $\operatorname{mmc}(10, 15, 21) = 210$.

Segundo método: decomposição simultânea. Como o próprio nome já diz, esse método consiste em decompor simultaneamente, como produtos de fatores primos, os números dos quais queremos calcular o MMC.

Exemplo 5. *Vamos calcular novamente* $\operatorname{mmc}(35, 231)$*, usando agora o segundo método. Geralmente, escrevemos os números lado a lado, separados por vírgulas, e traçamos uma reta vertical à direita desses números, do seguinte modo:*

$$\begin{array}{r|l} 35, 231 & \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

Como o menor número primo que divide um dos números é 3 *(divide* 231*), escrevemos:*

$$\begin{array}{r|l} 35, 231 & 3 \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

Em seguida, dividimos 231 *por* 3 *e escrevemos o quociente* 77 *logo abaixo de* 231*. Como* 35 *não é divisível por* 3*, apenas repetimos esse número na segunda linha:*

$$\begin{array}{rr|l} 35, & 231 & 3 \\ 35, & 77 & \\ & & \\ & & \end{array}$$

Repetindo o processo, procuramos o próximo primo que divide um dos números. O primo 5 *divide* 35*, logo, fazendo como acima, escrevemos:*

$$\begin{array}{rr|l} 35, & 231 & 3 \\ 35, & 77 & 5 \\ 7, & 77 & \\ & & \end{array}$$

Os próximos primos são 7 *e* 11*:*

$$\begin{array}{rr|r} 35, & 231 & 3 \\ 35, & 77 & 5 \\ 7, & 11 & 7 \\ 1, & 11 & 11 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

O processo terminará quando obtivermos uma lista formada apenas pelo número 1*, pois não será mais possível dividir por primos. O MMC será, então, igual ao produto dos números primos que aparecem na coluna à direita da linha vertical:* $\operatorname{mmc}(35, 231) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155.$

Exemplo 6. *Vamos usar o segundo método para calcular o MMC de mais de dois números. Mais precisamente, para calcular* $\operatorname{mmc}(18, 24, 30)$*, fazemos como abaixo:*

$$\begin{array}{rrr|l} 18, & 24, & 30 & 2 \\ 9, & 12, & 15 & 2 \\ 9, & 6, & 15 & 2 \\ 9 & 3, & 15 & 3 \\ 3, & 1, & 5 & 3 \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Assim, $\operatorname{mmc}(18, 24, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360.$

Terceiro método: decomposição em fatores primos. Seja

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$$

o conjunto dos números primos. Se $n > 1$ é um número natural, sabemos que existe um único modo de escrever n como produto de potências de elementos de P:

$$n = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot 7^{r_4} \cdots \qquad (2)$$

Como P é um conjunto infinito e n tem uma quantidade finita de fatores, podemos garantir que $r_i = 0$ para todo valor suficientemente grande de i.

Exemplo 7. *A decomposição do número* 525 *é*

$$525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdots ,$$

de forma que, a partir do fator 11*, todas as potências de primos que aparecem como fatores nesse produto têm expoente zero (logo, são iguais a* 1*). É claro que podemos simplesmente escrever* $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$*, mas a decomposição escrita como em* (2) *será útil para calcularmos o MMC de dois ou mais números.*

Vamos, agora, considerar dois números naturais não nulos a e b, e suas respectivas decomposições como produtos de primos:

$$a = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot 7^{r_4} \cdots$$
$$b = 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot 5^{s_3} \cdot 7^{s_4} \cdots$$

O MMC de a e b é dado por

$$\operatorname{mmc}(a, b) = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot 7^{m_4} \cdots \qquad (3)$$

onde, para cada i, pomos $m_i = \max\{r_i, s_i\}$, isto é, m_i é o maior dos dois números r_i e s_i.

Exemplo 8. *Para calcular o MMC de* 35 *e* 231 *com o terceiro método, observamos, inicialmente, que*

$$35 = 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdots$$

e

$$231 = 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdots .$$

Agora, observe que, para cada primo maior ou igual a 13*, o maior expoente tanto em* 35 *quanto em* 231 *é igual a* 0*. Portanto, de acordo com* (3)*, temos*

$$\begin{aligned} \operatorname{mmc}(35, 231) &= 3^{\max\{0,1\}} \cdot 5^{\max\{1,0\}} \cdot 7^{\max\{1,0\}} \cdot 11^{\max\{0,1\}} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155. \end{aligned}$$

Se quisermos calcular o MMC de três ou mais números, procedemos da mesma forma. Por exemplo, se

$$c = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot 7^{t_4} \cdots$$

então $\mathrm{mmc}\,(a, b, c)$ é dado como em (3), onde agora, para cada i, pomos $m_i = \max\{r_i, s_i, t_i\}$, ou seja, m_i é o maior dos três números r_i, s_i, t_i.

Exemplo 9. *Para calcular* $\mathrm{mmc}\,(525, 1001, 210)$, *começamos escrevendo:*

$$525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdots$$

$$1001 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^0 \cdots$$

$$200 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdots$$

Agora, notamos que, a partir do primo 17*, todos os expoentes são iguais a zero. Selecionando, pois, o maior expoente em cada potência de primo, obtemos:*

$$\begin{aligned} \mathrm{mmc}\,(525, 1001, 210) &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^0 \cdots \\ &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \\ &= 600600. \end{aligned}$$

2 Propriedades do MMC

Apresentaremos, a seguir, algumas propriedades que serão úteis para o cálculo do MMC entre dois ou mais números, bem como para a resolução de alguns problemas.

A primeira propriedade é uma consequência direta do fato de o produto de dois números ser um múltiplo comum de ambos.

> O MMC de dois números naturais não nulos não pode ser maior do que o produto desses números. Em símbolos:
>
> $$\mathrm{mmc}\,(a, b) \le ab.$$

Se o número a divide o número b, então b é um múltiplo comum de a e b, e é o menor mútiplo comum não nulo, uma vez que é o menor múltiplo não nulo de b. Logo, podemos afirmar o seguinte:

> Se a e b são números naturais não nulos e a divide b, então
>
> $$\mathrm{mmc}\,(a, b) = b.$$

Em particular, se a é um número natural não nulo, então $\mathrm{mmc}\,(a, 1) = a$.

Na primeira parte dessa aula, estudamos o MDC de números naturais. Na discussão sobre o terceiro método de cálculo do MDC, vimos que podemos obter $\mathrm{mdc}\,(a, b)$ observando as fatorações de a e de b como produtos de potências de primos e selecionando, para cada primo, o *menor* expoente dos dois que aparecem nas fatorações. Podemos reescrever esse resultado usando a notação que estabelecemos aqui, da seguinte maneira: sejam

$$\begin{aligned} a &= 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot 7^{r_4} \cdots \\ b &= 2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \cdot 5^{s_3} \cdot 7^{s_4} \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

as fatorações de a e b como produtos de potências de primos. Temos:

$$\mathrm{mdc}\,(a, b) = 2^{\ell_1} \cdot 3^{\ell_2} \cdot 5^{\ell_3} \cdot 7^{\ell_4} \cdots, \tag{5}$$

onde, para cada i, pomos $\ell_i = \min\{r_i, s_i\}$, ou seja, ℓ_i é o menor dos dois números r_i e s_i.

De posse de (5), podemos estabelecer uma conexão muito importante entre o MDC e o MMC de dois números naturais não nulos.

> Se a e b são dois números naturais não nulos, então
>
> $$\mathrm{mdc}\,(a, b) \cdot \mathrm{mmc}\,(a, b) = ab.$$

Para justificar a validade dessa resultado, vamos multiplicar a e b, dados como em (4):

$$ab = 2^{r_1+s_1} \cdot 3^{r_2+s_2} \cdot 5^{r_3+s_3} \cdot 7^{r_4+s_4} \cdots.$$

Agora, para cada i, sejam

$$\ell_i = \min\{r_i, s_i\} \quad \text{e} \quad m_i = \max\{r_i, s_i\}.$$

Se $r_i > s_i$, então $\ell_i = s_i$ e $m_i = r_i$, de forma que $r_i + s_i = m_i + \ell_i$; analogamente, se $r_i = s_i$ ou $r_i < s_i$, ainda teremos $r_i + s_i = \ell_i + m_i$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} ab &= 2^{\ell_1+m_1} \cdot 3^{\ell_2+m_2} \cdot 5^{\ell_3+m_3} \cdot 7^{\ell_4+m_4} \cdots \\ &= (2^{\ell_1} \cdot 3^{\ell_2} \cdot 5^{\ell_3} \cdot 7^{\ell_4} \cdots) \cdot (2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot 7^{m_4} \cdots) \\ &= \mathrm{mdc}\,(a, b) \cdot \mathrm{mmc}\,(a, b), \end{aligned}$$

onde utilizamos (3) e (5) na última igualdade acima.

Uma consequência importante da relação geral entre o MDC e o MMC é a seguinte.

> Se a e b são números naturais não nulos e primos entre si, então
>
> $$\mathrm{mmc}\,(a, b) = ab.$$

A relação entre o MDC e o MMC nos fornece outro método para calcular o MMC de dois números. Basta calcular o produto dos dois números e o MDC deles, fazendo uma divisão em seguida. Vamos ilustrar esse método com um exemplo.

Exemplo 10. *Vamos calcular* $\mathrm{mmc}\,(420, 95)$. *Para isso, calculamos o produto* $420 \cdot 95 = 41580$ *e o MDC entre*

420 *e* 95 *por um dos métodos estudados na parte 1. Por exemplo,*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 420 & 95 & 40 & 15 & 10 & 5 \\ \hline 40 & 15 & 10 & 5 & 0 & \end{array}, \qquad (6)$$

de forma que $\operatorname{mdc}(420, 95) = 5$. *Portanto,*

$$\operatorname{mmc}(420, 95) = \frac{41580}{5} = 8316.$$

3 Exercícios sobre MMC

Nesta seção, resolvemos alguns exercícios interessantes envolvendo a noção de MMC.

Exemplo 11. *O MCD de dois números é igual a* 3 *e o MMC desses mesmos números é igual a* 42. *Determine os possíveis valores desses números.*

Solução: os números a e b procurados satisfazem $ab = \operatorname{mdc}(a, b) \cdot \operatorname{mmc}(a, b) = 3 \cdot 42 = 126$. Como $\operatorname{mdc}(a, b) = 3$, podemos escrever $a = 3u$ e $b = 3v$, onde u e v são números naturais primos entre si. Assim, $ab = 126$ implica que $9uv = 126$, ou seja, $uv = 14$. Logo, os possíveis valores para u e v são $u = 1$ e $v = 14$, $u = 2$ e $v = 7$, $u = 7$ e $v = 2$, $u = 14$ e $v = 1$. Esses valores fornecem, respectivamente, $a = 3$ e $b = 42$, $a = 6$ e $b = 21$, $a = 21$ e $b = 6$, $a = 42$ e $b = 3$. Então, esses são os possíveis valores de a e b satisfazendo as condições do problema.

Exemplo 12. *Um doente precisa tomar os remédios* A, B *e* C *a cada* 3, 4 *e* 5 *horas, respectivamente. Ele tomou o remédio* A *às* 2*h da manhã, o remédio* B *às* 3*h da manhã e o remédio* C *às* 4*h da manhã. Sabendo que ele vai tomar os remédios por* 30 *dias, quantas vezes ele tomará os três remédios simultaneamente?*

Solução: a contar da zero hora do primeiro dia em que o doente passou a tomar os remédios, seja n o número de horas que se passarão até que ele tome os três remédios simultaneamente pela primeira vez. As prescrições dos remédios fornecem as igualdades $n = 3q_1 + 2$, $n = 4q_2 + 3$ e $n = 5q_3 + 4$, para certos números naturais q_1, q_2 e q_3. Então, observando que

$$n + 1 = 3(q_1 + 1) = 4(q_2 + 1) = 5(q_3 + 1),$$

concluímos que $n + 1$ é um múltiplo comum de 3, 4 e 5. O menor valor possível de $n + 1$ é, portanto, o MMC de 3, 4 e 5, ou seja, $n + 1 = \operatorname{mmc}(3, 4, 5) = 60$; Logo, $n = 59$ horas.

Isso significa que, após 59 horas, o paciente tomará os três medicamentos simultaneamente pela primeira vez. Em 30 dias há $30 \cdot 24 = 720$ horas. Dividindo 720 por 59, obtemos quociente 12, o que significa que o paciente tomará os três medicamentos simultaneamente exatamente 12 vezes.

O problema a seguir é bem antigo, podendo ser encontradas versões dele nos tratados do matemático e astrônomo indiano Bhaskara I (século VII) e do matemático árabe Alhazen (século XI), bem como no *Liber Abaci* de Leonardo Fibonacci (século XIII).

Exemplo 13. *Se os ovos em uma cesta são separados em grupos de* 2, 3, 4, 5 *e* 6, *sobram* 1, 2, 3, 4 *e* 5 *ovos, respectivamente. Se esses ovos são separados em grupos de* 7, *não sobram ovos. Qual é o menor número possível de ovos na cesta?*

Solução: se n é o número de ovos na cesta, o enunciado nos diz que $n = 2q_1 + 1$, $n = 3q_2 + 2$, $n = 4q_3 + 3$, $n = 5q_4 + 4$, $n = 6q_5 + 5$ e $n = 7q_6$, onde q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 e q_6 são números naturais. Somando 1 a ambos os membros das cinco primeiras igualdades, obtemos $n + 1 = 2(q_1 + 1) = 3(q_2 + 1) = 4(q_3 + 1) = 5(q_4 + 1) = 6(q_5 + 1)$. Assim, $n + 1$ é um múltiplo comum de $2, 3, 4, 5$ e 6, de sorte que o menor valor para $n + 1$ é igual ao MMC desses números, que é, pelo terceiro método,

$$\operatorname{mmc}(2, 3, 4, 5, 6) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Segue que $n + 1$ é múltiplo de 60 e n é múltiplo de 7. Os números n tais que $n + 1$ é múltiplo de 60 são 59, 119, 179, ... Dentre esses números, o menor que também é múltiplo de 7 é $119 = 7 \cdot 17$. Portanto, o menor número possível de ovos na cesta é 119.

Dicas para o Professor

É possível cobrir o material dessa segunda parte da aula em dois encontros de 50 minutos. No primeiro, reserve algum tempo para exercícios mais mecânicos, onde o aluno deve compreender o funcionamento dos métodos e compará-los para decidir qual o mais eficiente em cada situação.

A propriedade que liga o MDC e o MMC é de especial importância e deve ser estudada com atenção. Os exercícios mais elaborados, como o exemplo 13, podem servir de preparação para o estudo do "Teorema Chinês sobre Restos", que não tratamos aqui, mas é uma continuação natural desse assunto. Em particular, você pode explorar com seus alunos problemas onde os restos da divisão não permitem soluções como as dos exemplos 12 e 13, começando com casos mais simples, como por exemplo o seguinte problema: *determinar o menor número natural que deixa resto* 1 *quando dividido por* 4 *e deixa resto* 2 *quando dividido por* 7.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 5*: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo, Nobel, 1989.

3. J. P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, Editora IMPA, 1998.