Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindros, Cones e Esferas

Esfera - Parte I

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Bolas de futebol, de basquete, de tênis, de sinuca, o Sol, a Lua, a Terra e os outros planetas, todos esses corpos são figuras com formato esférico. Uma bolha de sabão é uma superfície que também tem formato esférico. Neste material vamos estudar a esfera, tanto como sólido quanto como superfície.

1 Definição de esfera

O conjunto formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância dada $r > 0$ de um ponto fixado O é chamado **superfície esférica** S de centro O e raio r:

$$S = \{P \mid \overline{OP} = r\}. \tag{1}$$

O conjunto E formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r de um ponto fixado O é chamado a **esfera** de centro O e raio r:

$$E = \{P \mid \overline{OP} \leq r\}. \tag{2}$$

Dessa forma, consideraremos aqui a esfera E como sendo um *sólido* delimitado pela superfície esférica S de mesmo centro e mesmo raio.

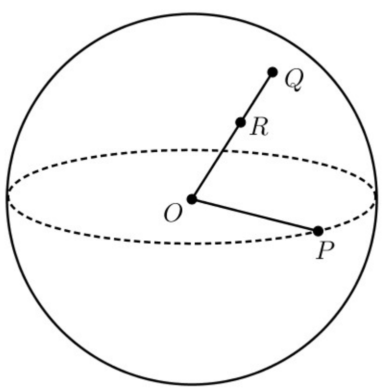

Figura 1: os pontos P e Q estão sobre a superfície esférica. O ponto R está na esfera correspondente.

Uma reta que passa pelo centro O de uma esfera E intersecta a superfície S dessa esfera em dois pontos A e B. Esses dois pontos são chamados **antípodas**, nome que vem do Grego e significa pés contra pés. A explicação para isso é que, vendo o globo terrestre como uma esfera, duas pessoas que estiverem em pontos antípodas do globo estarão exatamente nessa posição: pés contra pés.

Um segmento de reta cujos extremos são pontos antípodas A e B é denominado um **diâmetro** dessa esfera. O centro O da esfera é ponto médio do segmento AB e $\overline{AB} = 2r$, o dobro do raio da esfera.

Seja C um semicírculo e e a reta suporte do diâmetro de C. Uma *revolução* de C em torno de e é um giro de 360° de C em torno da reta e. Essa reta é chamada **eixo de revolução**. O sólido obtido pela revolução do semidisco delimitado por C em torno de e é uma esfera cujos centro e raio coincidem com o centro e o raio de C.

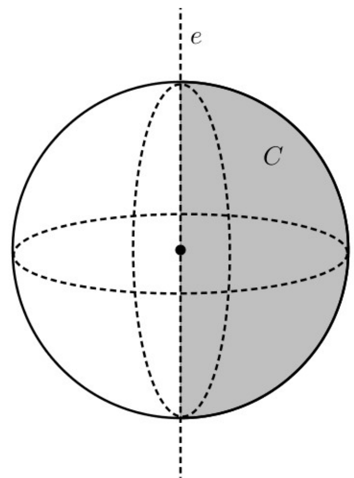

Figura 2: a esfera é um sólido de revolução.

Se um plano α intersecta uma esfera E, a figura plana resultante dessa interseção é um disco (veja a figura 3). De fato, se S é a superfície da esfera E, então $S \cap \alpha$ é a curva que delimita $E \cap \alpha$. Vamos mostrar que $S \cap \alpha$ é um círculo.

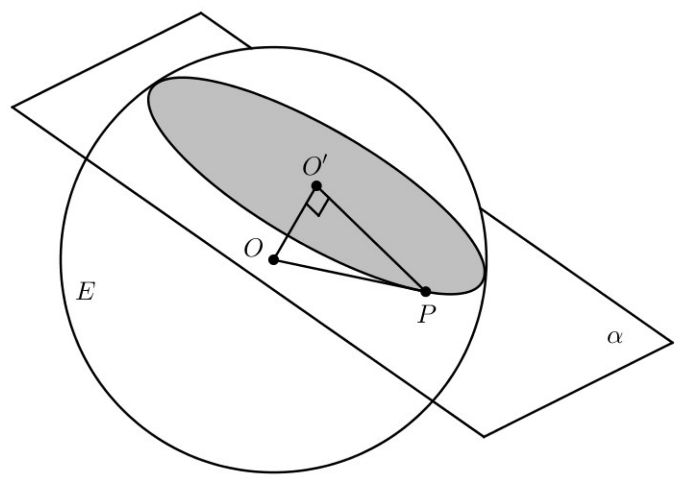

Figura 3: a interseção de uma esfera E e um plano α.

De fato, seja O' o pé da perpendicular baixada do ponto O ao plano α e seja P um ponto qualquer de $S \cap \alpha$ (figura 3).

Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $OO'P$, temos

$$\overline{O'P}^2 + \overline{OO'}^2 = \overline{OP}^2.$$

Como a distância $d = \overline{OO'}$ do ponto O ao plano α é fixada e $\overline{OP} = r$ é o raio da esfera (que também é fixada), a relação acima dá

$$\overline{O'P} = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Portanto, $\overline{O'P}$ não depende da posição de P, o que mostra que $S \cap \alpha$ é um círculo de raio $\sqrt{r^2 - d^2}$, centrado em O'.

Note que o valor máximo do raio $\sqrt{r^2 - d^2}$ do círculo $S \cap \alpha$ é r e ocorre somente se $d = 0$, ou seja, quando $O = O'$. Por isso, dizemos que $S \cap \alpha$ é um **círculo máximo** sobre a esfera se o plano α que o determina passa pelo centro da esfera.

2 Latitude e longitude

A esfera pode ser usada como um modelo da superfície do nosso planeta, apesar deste não ter uma forma exatamente esférica, mas ser levemente achatado nos pólos. Esse modelo é chamado **globo terrestre** e a localização de qualquer ponto sobre esse globo pode ser dada usando-se dois *ângulos*, chamados *latitude* e *longitude*. Isso pode parecer estranho, mas vamos explicar como encontrar esses ângulos.

Em uma esfera, fixe dois pontos antípodas e chame-os de **pólo norte**, N, e **pólo sul** S. Dado um ponto P sobre a superfície $\mathcal{S}$ dessa esfera, vamos encontrar duas *coordenadas* que localizam esse ponto de modo único.

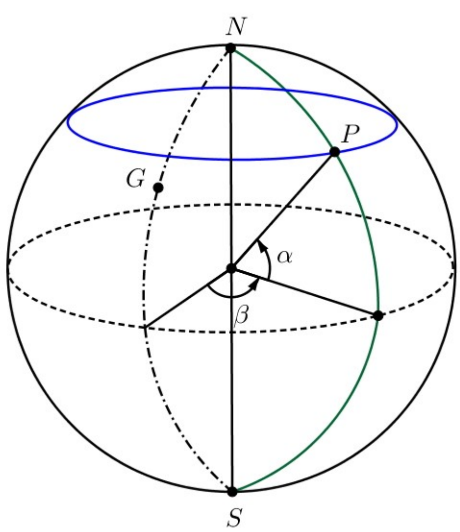

Figura 4: a latitude α e a longitude β de um ponto P sobre a superfície da esfera.

O círculo sobre $\mathcal{S}$ obtido intersectando-se $\mathcal{S}$ por um plano perpendicular à reta $\overleftrightarrow{NS}$ é chamado um **paralelo** de $\mathcal{S}$. O paralelo máximo, obtido quando α passa pelo centro da esfera, é chamado de **equador** da esfera (o círculo tracejado, na figura 4). O equador divide a esfera em duas metades, ditas seus **hemisférios**. O hemisfério que contém o pólo norte N é chamado **hemisfério norte**, ao passo que o hemisfério que contém o pólo sul S é chamado **hemisfério sul**.

Se α é um plano que contém a reta $\overleftrightarrow{NS}$, então $\mathcal{S} \cap \alpha$ é um círculo máximo sobre a esfera. Cada um desses círculos máximos é dividido em dois semicírculos pelos pontos N e S. Esses semicírculos são chamados **meridianos** de $\mathcal{S}$. Na figura 4, o semicírculo verde, que passa pelos pontos N, P e S, é um meridiano.

Ao contrário da situação dos paralelos, onde o equador se distingue dos outros por ser o único círculo máximo, todos os meridianos são semicírculos máximos. Por isso, precisamos distinguir um deles “artificialmente”. No caso do nosso sistema de coordenadas geográficas, o meridiano de referência é aquele que passa pelo lugarejo localizado a sudeste de Londres chamado *Greenwich*, representado na figura 4 pela letra G. Por isso, esse meridiano é chamado de **meridiano de Greenwich**. Assim, o meridiano de Greenwich é, nas notações da figura 4, o semicírculo que contém G, N e S.

Por convenção, posicionamos o globo terrestre com o pólo norte voltado para cima. Fixada essa posição, dizemos que os meridianos que estão à direita do meridiano de Greenwich estão a **leste**, enquanto aqueles situados à esquerda do meridiano de Greenwich estão a **oeste**.

Seja, agora, P um ponto sobre a superfície do globo terrestre (veja, novamente, a figura 4). Pelo ponto P passa um único paralelo e um único meridiano (na figura 4 tais paralelo e meridiano encontram-se desenhados em azul e verde, respectivamente).

O ângulo α, medido desde o equador até o ponto P ao longo do meridiano que o contém, é chamado de **latitude** do ponto P. Convenciona-se que a latitude varia de 0 a $90°$ em cada hemisfério, indicando-se o hemisfério por uma das letras N ou S. Por exemplo, a cidade de Brasília, capital do Brasil, tem latitude $15°47'38''S$ (lê-se: quinze graus, quarenta e sete minutos e trinta e oito segundos sul). Já Paris, a capital da França, que está no hemisfério norte, tem latitude $48°52'N$.

Devemos lembrar que as subunidades “minuto” e “segundo” são definidas como $60' = 1°$ e $60'' = 1'$.

O ângulo β, medido desde o meridiano de Greenwich até o meridiano que passa por P, ao longo do equador, é chamado de **longitude** do ponto P. Convenciona-se que a longitude varia de 0 a $180°$, a leste ou a oeste do meridiano de Greenwich. Por exemplo, a longitude de Brasília é $47°52'58''O$, onde a letra O indica que Brasília está a *oeste* do meridiano de Greenwich. Note que as coordenadas $15°47'38''S$ e $47°47'38''O$ localizam a cidade de Brasília no globo terrestre.

A cada meridiano com longitude β corresponde um meridiano de longitude $180° - \beta$ que o suplementa, sendo que os dois juntos formam um círculo máximo sobre a esfera. Em particular, o semicírculo suplementar ao meridiano de Greenwich é chamado *antimeridiano de Greenwich* e corresponde às longitudes $180°L$ e $180°O$. Esse meridiano está quase que totalmente sobre o Oceano Pacífico, encontrando terra firme apenas no Alasca. Ele está próximo à *linha internacional da data*, que é uma linha imaginária sobre o globo terrestre que, quando atravessada, implica uma mudança obrigatória de data: ao se cruzar a linha de leste para oeste, é necessário atrasar um dia no calendário. Ao se atravessar no sentido contrário, é necessário adiantar um dia no calendário.

Esse fenômeno perturbou os marinheiros da expedição de Fernão de Magalhães, primeiro navegador a dar uma volta completa ao redor da Terra. Ele também foi explorado por Júlio Verne no seu famoso livro *A Volta ao Mundo em 80 Dias*, e pelo escritor italiano Umberto Eco, no seu livro *A Ilha do Dia Anterior*.

3 Volume da esfera

Nesta seção, vamos calcular o volume de uma esfera de raio r usando o *Princípio de Cavalieri*, que foi estudado no módulo 2 de Geometria Espacial.

A ideia é comparar a esfera com um outro sólido, chamado *anti-clépsidra*, cujo volume é conhecido. Para tanto, consideramos uma esfera S de raio R e um cilindro C, com raio da base também igual a R e cuja altura é igual ao diâmetro $2R$ da esfera S (veja a figura 5). No interior desse cilindro, tomamos dois cones de altura R, cujas bases são círculos de raio R, posicionados de modo que seus vértices se toquem. O sólido interior ao cilindro e exterior aos dois cones é chamado **anti-clépsidra**.

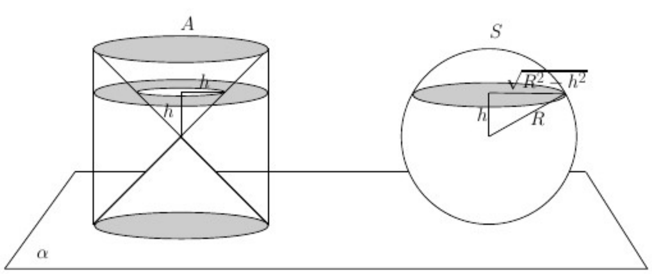

Figura 5: a esfera e a anti-clépsidra.

Supondo a esfera S e a anti-clépsidra A apoiados sobre um plano α, seja β um plano paralelo a α, cuja distância até o centro de S é igual a h.

É imediato verificar que $A \cap \beta$ é uma coroa circular de raios h e R, ao passo que $S \cap \beta$ é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$. Portanto, denotando por $a(\beta)$ e $s(\beta)$ as áreas de $A \cap \beta$ e $S \cap \beta$, respectivamente, temos

$$a(\beta) = \pi R^2 - \pi h^2$$

e

$$s(\beta) = \pi \left(\sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Assim, $a(\beta) = s(\beta)$ para qualquer plano β paralelo a α. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o volume $v(S)$ da esfera é igual ao volume $v(A)$ da anti-clépsidra. Mas, uma vez que esse último volume é igual ao volume do cilindro C menos o dobro do volume de um dos cones retirados de C para formar A. Assim, temos

$$\begin{aligned} v(S) &= v(A) = \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

4 Área da superfície esférica

Nesta seção, vamos calcular a área da superfície de uma esfera. Para isso, usaremos um argumento devido, essencialmente, ao matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 aC - 212 aC).

Consideremos uma superfície esférica gerada pela revolução em torno do eixo e de um círculo C, como na figura 2. Vamos considerar uma poligonal P cujos vértices estão sobre o círculo C. A revolução de P em torno do eixo e gera uma superfície que é a união das laterais vários troncos de cones.

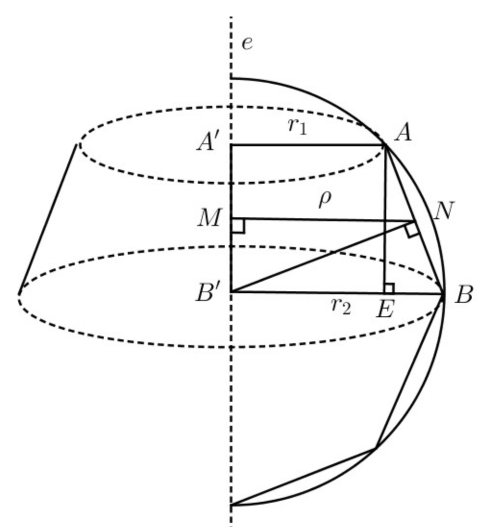

Figura 6: lateral de um tronco de cone gerada pela revolução do segmento.

Na aula sobre cones, vimos que a área lateral de um tronco de cone é dada por

$$A_L = \pi(r_1 + r_2)g,$$

onde $r_1 = \overline{AA'}$ e $r_2 = \overline{BB'}$ são os raios das bases do tronco de cone (figura 6) e $g = \overline{AB}$ é o comprimento da geratriz do tronco.

Seja $\rho = \overline{MN}$, onde M é o ponto médio de $A'B'$ e MN é paralela a AA' e BB' (veja novamente a figura 6). Usando semelhança de triângulos, podemos concluir facilmente que $\rho = \frac{r_1+r_2}{2}$. Assim,

$$A_L = 2\pi\Big(\frac{r_1 + r_2}{2}\Big)g = 2\pi\rho g.$$

Na figura 6, os triângulos ABE e $NB'M$ (por terem dois ângulos iguais) são semelhantes. Logo, $\frac{\overline{AE}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B'N}}$, ou seja, $\frac{h}{\rho} = \frac{g}{a}$, onde h é a altura do tronco de cone e $a = \overline{B'N}$ é o *apótema* da poligonal. Assim, $\rho g = ah$, o que nos permite escrever

$$A_L = 2\pi ah. \qquad (3)$$

Agora, tomemos uma poligonal $P_1P_2 \ldots P_n$, com $P_1 = N$, $P_n = S$ e $\overline{P_iP_{i+1}} = a$ para cada i. A revolução de cada segmento P_iP_{i+1}, com i variando de 1 a $n-1$, gera a lateral de um tronco de cone, cuja área é dada por

$$A_i = 2\pi ah_i$$

sendo a o apótema da poligonal e h_i a altura do tronco correspondente ao segmento P_iP_{i+1}.

Suponhamos que, à medida que n aumenta, a área A_S da superfície da esfera pode ser aproximada, com precisão arbitrariamente grande, pela soma das áreas laterais dos troncos de cone acima. Então,

$$\begin{aligned} A_S &\cong 2\pi ah_1 + \cdots + 2\pi ah_n \\ &= 2\pi a(h_1 + \cdots + h_n). \end{aligned}$$

Mas, como a soma das alturas dos troncos de cone é igual ao diâmetro $2R$ da esfera, temos $h_1 + \cdots + h_n = 2R$ e, daí,

$$A_S \cong 2\pi a \cdot 2R.$$

Conforme comentamos, a aproximação acima é tanto melhor quanto maior for o número n de lados da poligonal. Por outro lado, quando o n aumenta, o apótema a se aproxima cada vez mais do raio da esfera, de sorte que

$$A_S = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

A discussão sobre as coordenadas geográficas é bastante interessante e motivadora, pois envolve uma aplicação da geometria que pode ser explorada pelos estudantes. Se seus alunos têm acesso à Internet, você pode estimulá-los a procurar a localização da sua cidade. A latitude a a longitude de um ponto sobre o globo terrestre também podem ser encontradas em mapas impressos. Você pode, ainda, questionar seus alunos sobre a escolha dos pólos, do equador e do meridiano de referência. Quais delas são naturais, por dependerem da rotação da Terra e quais escolhas são meras convenções, como a do meridiano de Greenwich ou o fato do pólo norte estar situado na parte de cima do globo.

O cálculo do volume da esfera é uma aplicação importante do Princípio de Cavalieri. A área da superfície esférica é obtida usando-se o método de Arquimedes. Evitamos aqui o uso do Princípio da Exaustão, que deve ser usado para justificar que a soma das áreas dos troncos de cone realmente aproxima, com precisão arbitrariamente grande, a área da superfície esférica. Para uma abordagem mais rigorosa, usando noções de Cálculo, veja a sugestão de leitura complementar [1].

As demais referências contém vários exercícios e exemplos acerca do material discutido aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
3. O. Dolce, J. N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, sétima edição, São Paulo, 2013.