Material Teórico - Módulo Equações e Sistemas de Equações Fracionárias

Sistemas de Equações Fracionárias

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Sistemas de equações fracionárias

Nessa aula, discutiremos alguns exemplos de sistemas de equações fracionárias. Na maioria das vezes, reduziremos a solução desses sistemas à solução de sistemas lineares, já discutida em aulas anteriores.

Vale frisar que não há *estratégia geral* que nos permita, uma vez apresentados a um certo sistema de equações fracionárias, saber de imediato qual o melhor caminho a seguir para resolvê-lo. Aí reside, portanto, a importância de exercitar repetidas vezes a solução de tais sistemas, a fim de adquirir uma relativa *intuição matemática* que permita escolher uma abordagem com boas chances de sucesso. Nesse sentido, chamamos a atenção do leitor para a estratégia de *mudança de variáveis*, que será utilizada várias vezes a seguir e que, por vezes, imediatamente transforma um sistema dado e aparentemente complicado num sistema linear bastante simples.

Exemplo 1. *Resolva o sistema de equações abaixo:*

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

Solução. Fazendo a mudança de variáveis

$$a = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{y}, \tag{1}$$

é imediato verificar que transformamos o sistema de equações dado no sistema linear com duas equações e duas incógnitas abaixo:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ a - b = \frac{1}{6} \end{cases}. \tag{2}$$

Para resolver o último sistema acima, começamos multiplicando a primeira equação por 2, a segunda por 6 e adicionando os resultados:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4a & + & \cancel{6b} & = & 4 \\ 6a & - & \cancel{6b} & = & 1 \\ \hline 10a & & & = & 5, \end{array}\right.$$

donde segue que

$$a = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Em seguida, substituímos o valor de a na primeira das equações de (2), obtendo:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3b = 2 \Longrightarrow 3b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, retornando a (1), obtemos

$$\frac{1}{x} = a = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 2$$

e

$$\frac{1}{y} = b = \frac{1}{3} \Longrightarrow y = 3.$$

□

Exemplo 2. *Resolva o sistema de equações:*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-y} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3}{x+y} = -2 \end{cases}.$$

Solução. Primeiramente, observe que devemos necessariamente ter $x \neq y$ e $x \neq -y$, a fim de que os denominadores $x - y$ e $x + y$ das equações do sistema não se anulem. Sob tais condições, temos as equivalências abaixo:

$$\frac{x}{x-y} = \frac{1}{5} \Longleftrightarrow 5x = x - y \Longleftrightarrow 4x + y = 0$$

e

$$\frac{3}{x+y} = -2 \Longleftrightarrow 3 = -2x - 2y \Longleftrightarrow 2x + 2y = -3.$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases}. \tag{3}$$

Para resolvê-lo, começamos multiplicando a primeira equação por 2, a segunda por -1 e, em seguida, adicionando os resultados:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 8x & + & \cancel{2y} & = & 0 \\ -2x & - & \cancel{2y} & = & 3 \\ \hline 6x & & & = & 3. \end{array}\right.$$

Daí, obtemos

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Agora, substituímos o valor de x na primeira equação do sistema (3) para obter

$$4 \cdot \frac{1}{2} + y = 0 \Longrightarrow 2 + y = 0 \Longrightarrow y = -2.$$

□

Exemplo 3. *Encontre a(s) solução(ões) do sistema de equações abaixo:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + x = -4 \\ \dfrac{2}{x+y} - x = 1 \end{cases}.$$

Solução. Fazendo $z = \dfrac{1}{x+y}$, o sistema do enunciado é transformado em:

$$\begin{cases} z + x = -4 \\ 2z - x = 1 \end{cases}. \tag{4}$$

Adicionando-se suas duas equações, obtemos:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} z & + & \cancel{x} & = & -4 \\ 2z & - & \cancel{x} & = & 1 \\ \hline 3z & & & = & -3, \end{array}\right.$$

de sorte que $z = -1$. Portanto, a primeira equação de (4) fornece

$$-1 + x = -4 \Longrightarrow x = -3.$$

Finalmente, substituindo os valores já conhecidos de x e z em $z = \dfrac{1}{x+y}$, obtemos:

$$-1 = \frac{1}{-3+y} \Longrightarrow -3 + y = -1 \Longrightarrow y = 2.$$

$\square$

Exemplo 4. *Encontre, se houver, todos os números reais x e y que resolvem o sistema de equações:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{2}{x-2} & = & \dfrac{10}{y-3} \\ 3x - 4y & = & 11. \end{array}\right.$$

Solução. Começamos observando que devemos ter $x \neq 2$ e $y \neq 3$. Por sua vez, assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} = \frac{10}{y-3} &\Longleftrightarrow 2(y-3) = 10(x-2) \\ &\Longleftrightarrow 10x - 20 = 2y - 6 \\ &\Longleftrightarrow 10x - 2y = 14 \\ &\Longleftrightarrow 5x - y = 7. \end{aligned}$$

O sistema do enunciado é, pois, equivalente ao sistema:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} 5x & - & y & = & 7 \\ 3x & - & 4y & = & 11. \end{array}\right.$$

Para resolver o último sistema acima podemos, por exemplo, multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por -5, adicionando os resultados em seguida:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \cancel{15x} & - & 3y & = & 21 \\ -\cancel{15x} & + & 20y & = & -55 \\ \hline & & 17y & = & -34. \end{array}\right.$$

A partir daí, segue facilmente que $y = -2$. Agora, substituímos o valor $y = -2$ na equação $3x - 4y = 11$ para, finalmente, obter:

$$\begin{aligned} 3x - 4 \cdot (-2) = 11 &\Longrightarrow 3x + 8 = 11 \\ &\Longrightarrow 3x = 3 \\ &\Longrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Em relação ao próximo exemplo, observe como uma mudança de variáveis fica *implícita* na primeira solução.

Exemplo 5. *Resolva o sistema de equações fracionárias abaixo:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{x+y}{xy} & = & \dfrac{9}{20} \\ \dfrac{x-y}{xy} & = & \dfrac{1}{20}. \end{array}\right.$$

Solução 1. Começamos reescrevendo as equações do sistema conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{xy} = \frac{9}{20} &\Longrightarrow \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} + \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} = \frac{9}{20} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{20} &\Longrightarrow \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} - \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} = \frac{1}{20} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o sistema dado equivale a

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{9}{20} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{1}{20} \end{array}\right. .$$

Para resolvê-lo, somamos suas duas equações, obtendo:

$$\frac{2}{y} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $y = 4$ e, substituindo esse valor na primeira equação do último sistema, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{9}{20} &\Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{9}{20} - \frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{9}{20} - \frac{5}{20} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \\ &\Longrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

$\square$

Solução 2. Observe primeiramente que $x, y \neq 0$. Então, desenvolvendo as equações do sistema original, obtemos

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{9}{20} \Longrightarrow 20(x+y) = 9xy$$

e

$$\frac{x-y}{xy} = \frac{1}{20} \Longrightarrow 20(x-y) = xy.$$

Dessa forma, o sistema original é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{lcl} 20x + 20y & = & 9xy \\ 20x - 20y & = & xy \end{array}\right. .$$

Somando membro a membro as duas equações acima, obtemos $40x = 10xy$. Mas, como $x \neq 0$, segue daí que $40 = 10y$, logo, $y = 4$. Analogamente, subtraindo membro a membro as duas equações e utilizando o fato de que $y \neq 0$, obtemos sucessivamente $40y = 8xy$ e $x = 5$. □

Nesse ponto, como exercício sugerimos ao leitor resolver novamente o Exemplo 1, utilizando uma técnica similar à apresentada na segunda solução do exemplo acima.

Nosso último exemplo também é discutido na vídeo-aula.

Exemplo 6. *Numa festa, cada criança convidada deveria receber uma mesma quantidade de brigadeiros. Entretanto, três delas se anteciparam à distribuição: a primeira comeu* 2*, a segunda comeu* 3 *e a terceira comeu* 4 *brigadeiros além dos que tinha direito, o que resultou no consumo da metade dos brigadeiros. O restante dos brigadeiros foi dividido igualmente entre as demais crianças e, desse modo, cada uma delas recebeu* 1 *brigadeiro a menos do que lhes era devido. Quantos brigadeiros havia no início da festa?*

Solução. Denotando por x a quantidade total de brigadeiros no início da festa e por y a quantidade de crianças presentes à festa, concluímos que a quantidade de brigadeiros que deveria ter sido dada a cada criança era $\frac{x}{y}$.

Entretanto, é dito no enunciado que três das crianças anteciparam-se à distribuição, comendo 2, 3 e 4 brigadeiros a mais do que deveriam; dessa forma, essas três crianças comeram, antes da distribuição, um total de

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{x}{y} + 3 + \frac{x}{y} + 4 = \frac{3x}{y} + 9$$

brigadeiros.

É também comentado que esse consumo antecipado de brigadeiros por parte dessas três crianças resultou no consumo de metade do total de brigadeiros, situação que podemos representar pela seguinte equação:

$$\frac{3x}{y} + 9 = \frac{x}{2}.$$

Por outro lado, os brigadeiros restantes, num total de

$$x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

foram igualmente divididos entre as demais crianças, que de acordo com a nossa notação eram $y - 3$. Dessa forma, cada uma delas recebeu

$$\frac{\frac{x}{2}}{y-3} = \frac{x}{2(y-3)}$$

brigadeiros, é dito também que isso correspondeu a 1 brigadeiro a menos do que deveria. Então, obtemos a equação:

$$\frac{x}{2(y-3)} = \frac{x}{y} - 1.$$

Tendo em vista os argumentos acima, devemos resolver o seguinte sistema de equações fracionárias:

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{y} + 9 & = & \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{x}{2(y-3)} & = & \dfrac{x}{y} - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Para tanto, note que

$$\begin{aligned} \frac{3x}{y} + 9 = \frac{x}{2} &\iff \frac{6x + 18y}{\cancel{2y}} = \frac{xy}{\cancel{2y}} \\ &\iff 6x + 18y = xy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{x}{2(y-3)} = \frac{x}{y} - 1 &\iff \frac{x}{2(y-3)} = \frac{x-y}{y} \\ &\iff xy = 2(y-3)(x-y) \\ &\iff xy = 2xy - 6x - 2y^2 + 6y \\ &\iff xy = 2y^2 + 6x - 6y. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o sistema abaixo, equivalente a (5):

$$\begin{cases} xy & = & 6x & + & 18y \\ xy & = & 2y^2 & + & 6x & - & 6y \end{cases}.$$

Igualando as duas equações do último sistema acima, obtemos:

$$\begin{aligned} 2y^2 + \cancel{6x} - 6y = \cancel{6x} + 18y &\iff 2y^2 = 24y \\ &\iff 2y = 24 \\ &\iff y = 12. \end{aligned}$$

Por fim, substituímos $y = 12$ na primeira equação de (5), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{12} + 9 = \frac{x}{2} &\Longrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 9 \\ &\Longrightarrow \frac{x}{4} = 9 \\ &\Longrightarrow x = 36, \end{aligned}$$

ou seja, havia 36 brigadeiros no início da festa. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos cada para discutir todo o conteúdo presente nesse material. Ressalte que o processo para obter as soluções da maioria dos exemplos apresentados pode ser resumido a obter um modo de transformá-los em sistemas lineares, cujas técnicas de resolução já foram estudadas anteriormente. Por sua vez, enfatize que introduzir novas variáveis é frequentemente uma boa estratégia para operar uma tal transformação.

As referências colecionadas a seguir contém muitos problemas e exemplos relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. G Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 6: Complexos, Polinômios Equações*. São Paulo, Atual Editora, 2012.