Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Seno, Cosseno e Tangente
Parte 6

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de janeiro de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Neste material, apresentaremos alguns problemas mais elaborados, cujas soluções ainda envolvem as identidades trigonométricas conhecidas como fórmulas de adição e transformação em produto, que foram deduzidas em aulas anteriores.

Exemplos

Exemplo 1 (IME). *Todos os arcos entre* 0 *e* 2π *que satisfazem a desigualdade*

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

estão compreendidos entre

(a) $\frac{\pi}{12}$ *e* $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{5\pi}{12}$ *e* $\frac{7\pi}{12}$

(c) $\frac{2\pi}{3}$ *e* $\frac{5\pi}{6}$

(d) $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{\pi}{2}$

(e) $\frac{5\pi}{6}$ *e* $\frac{11\pi}{12}$

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff & \operatorname{sen} x - \cos x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff & \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \iff & \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

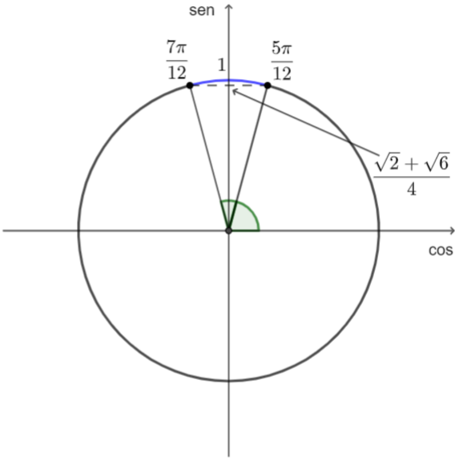
e que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}>\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\iff \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Agora, observe o círculo trigonométrico abaixo.



Concluímos que, para x entre 0 e 2π, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\\
&\iff \frac{5\pi}{12} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{12}\\
&\iff \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\\
&\iff \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra (c). $\square$

Exemplo 2 (FUVEST). *É dada a função $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$, para todo $x \in [0,\pi]$.*

(a) *Apresente três valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$.*

(b) *Determine os valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.*

(c) *Determine os valores $x \in [0,\pi]$ para os quais*

$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8}.$$

Solução.

(a) Podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x\\
&= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\\
&= \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2\right)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\\
&= 1^2 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$, o que implica $\operatorname{sen}^2(2x) = 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$. Daí, segue que

$$2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{2}.$$

Portanto, obtemos

$$f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2}.$$

Para encontrar valores $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$, fazemos

$$1 = f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2},$$

donde obtemos

$$\text{sen}^2(2x) = 0.$$

Mas $x \in [0,\pi]$ se, e somente se, $2x \in [0,2\pi]$. Portanto, $\text{sen}(2x) = 0$ se, e somente se, $2x = 0$, $2x = \pi$ ou $2x = 2\pi$, ou seja, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$. Esses são os três valores de $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

(b) Repetindo a ideia do item anterior, desejamos encontrar valores de $x \in [0,\pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$, isto é,

$$\frac{5}{8} = f(x) = 1 - \frac{\text{sen}^2(2x)}{2}.$$

Logo,

$$\text{sen}^2(2x) = \frac{3}{4},$$

ou seja,

$$\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \text{sen}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mas $x \in [0,\pi]$ se, e somente se, $2x \in [0,2\pi]$. Portanto, $\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se, e somente se, $2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{2\pi}{3}$ e $\text{sen}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se, e somente se, $2x = \frac{4\pi}{3}$ ou $2x = \frac{5\pi}{3}$. Portanto, $f(x) = \frac{5}{8}$ se, e somente se, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

(c) Observe que

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \\
\iff & \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \\
\iff & -\frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} - \frac{1}{8} \geq 0 \\
\iff & 2\,\mathrm{sen}^2(2x) - 3\,\mathrm{sen}(2x) + 1 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Fazendo $y = \mathrm{sen}(2x)$, temos que

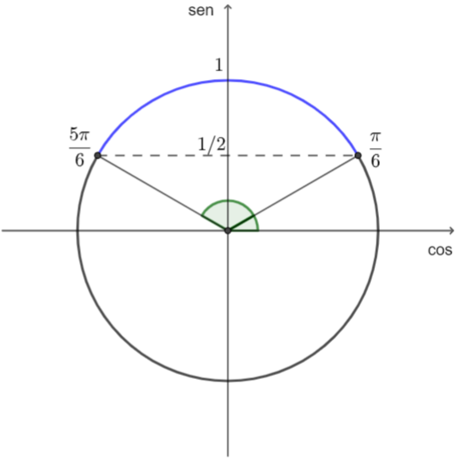
$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \iff 2y^2 - 3y + 1 \leq 0.$$

Mas o conjunto verdade da inequação $2y^2 - 3y + 1 \leq 0$ em $\mathbb{R}$ é o intervalo $[1/2,1]$. Portanto, procuramos os números reais $x \in [0,\pi]$, tais que $\frac{1}{2} \leq \mathrm{sen}(2x) \leq 1$. Observando com atenção o círculo trigonométrico abaixo, percebemos que os valores de $x \in [0,\pi]$ para os quais $\frac{1}{2} \leq \mathrm{sen}(2x) \leq 1$ são precisamente os valores de x tais que

$$\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} \iff \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}.$$

Portanto, concluímos que, se $x \in [0,\pi]$, então

$$\frac{f(x)}{2} + \frac{3\,\mathrm{sen}(2x)}{8} \geq \frac{5}{8} \iff x \in [\pi/12,5\pi/12].$$



$\square$

Exemplo 3 (ITA). *Sabendo que* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -2$ *e que* $\operatorname{sen}\alpha = (4-\sqrt{5})\operatorname{sen}(\beta)$, *em que* $\alpha,\beta \in (0,\pi/2)$, *calcule*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ \ e\ \ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Solução. Vamos utilizar a fórmula $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ para $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} -2 = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ &= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Fazendo $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, temos que $y > 0$, uma vez que

$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Além disso, temos que

$$-2 = \frac{2y}{1-y^2} \iff 2y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau em y e impondo a condição $y > 0$, obtemos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para calcular $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, utilizaremos as fórmulas $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$ e $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$. Com efeito, fazendo $p = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $q = \frac{\alpha-\beta}{2}$, obtemos $p+q = \alpha$, $p-q = \beta$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \\
&= 4 - \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Fazendo $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ e $z = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, a última equação acima nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{y+z}{y-z} = 4 - \sqrt{5} &\iff y + z = (4-\sqrt{5})y - (4-\sqrt{5})z \\
&\iff (5-\sqrt{5})z = (3-\sqrt{5})y \\
&\iff z = \frac{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(5-\sqrt{5})} \\
&\iff z = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2(5-\sqrt{5})} \\
&\iff z = \frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}} \\
&\iff z = \frac{\sqrt{5}}{5},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=z=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Finalmente, dividindo z por y, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\
&= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{5\cdot 4} \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4 (ITA). *Sejam $A=\cos\alpha+\cos\beta$ e $B=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Calcule $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ em função de A e B, sabendo que A e B são não nulos.*

Solução. Sendo $A=\cos\alpha+\cos\beta$ e $B=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta$, temos

$$\begin{aligned}
AB &= (\cos\alpha+\cos\beta)(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta) \\
&= \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&\quad+\cos\beta\operatorname{sen}\alpha-\cos\beta\operatorname{sen}\beta \\
&= \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}-\frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{2} \\
&\quad+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a fórmula de transformação em produto

$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha-2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta}{2}\right)\\ &= 2\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}AB &= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{2}+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\left[\cos(\alpha+\beta)+1\right].\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}A^2+B^2 &= (\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\\ &\quad+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta\\ &= \cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\\ &\quad+2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= 1+1+2(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\\ &= 2+2\cos(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{A^2+B^2-2}{2}.$$

Daí, segue que

$$1+\cos(\alpha+\beta)=1+\frac{A^2+B^2-2}{2}=\frac{A^2+B^2}{2}.$$

Portanto,

$$AB=\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cdot\frac{A^2+B^2}{2}.$$

Agora, como A e B são ambos não nulos, temos que $A^2 + B^2$ também o é. Assim, obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Antes de apresentar os exemplos, recomendamos que o professor faça uma revisão sobre as fórmulas de adição e transformação em produto. Também recomendamos que alguns exemplos mais simples sejam apresentados antes de explorar os exemplos deste material. Por fim, reforçamos a recomendação de que os alunos reservem um tempo para pensar nos problemas antes que sejam apresentadas soluções para os mesmos.

Sugestões de Leitura Complementar

1 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

2 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2022.

3 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.