

**Material Teórico - Módulo Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e
Relação de Stewart**

Teorema de Menelaus

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Dezembro de 2019

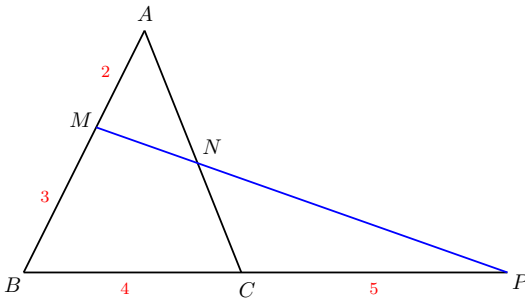


**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

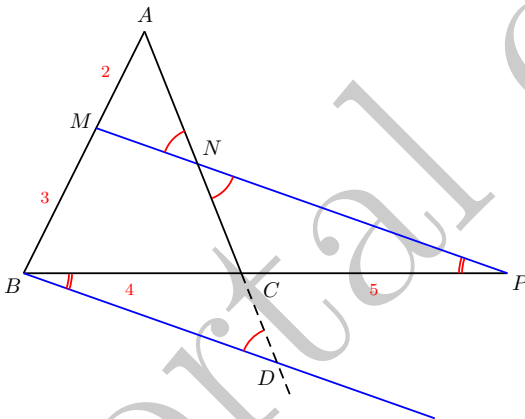
1 O Teorema de Menelaus

Neste material, apresentaremos uma demonstração do teorema de Menelaus, o qual fornece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos, cada um pertencendo à reta suporte de um dos lados de um triângulo ABC . Com o objetivo de motivar o estudo do teorema de Menelaus, iniciamos com o seguinte

Exemplo 1. *Sejam ABC um triângulo, M um ponto sobre o lado AB , N um ponto sobre o lado AC e P um ponto sobre o prolongamento do lado BC , tais que $\overline{AM} = 2$, $\overline{MB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CP} = 5$. Calcule a razão $\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$.*



Solução. Trace a reta paralela ao segmento MN e passando pelo vértice B (acompanhe na próxima figura). Marque o ponto D , de interseção dessa reta com o prolongamento do lado AC .



Observando as retas paralelas \overleftrightarrow{MN} e \overleftrightarrow{BD} cortadas pela transversal \overleftrightarrow{ND} , obtemos que os ângulos $\angle PNC$ e $\angle BDC$ são alternos internos, logo, têm mesma medida. De maneira análoga, mas agora considerando a transversal \overleftrightarrow{BP} , concluímos que os ângulos $\angle NPC$ e $\angle DBC$ também têm mesma medida. Assim, os triângulos PNC e BDC são semelhantes. Daí, obtemos

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{4} \implies \overline{CD} = \frac{4}{5} \cdot \overline{NC}. \quad (1)$$

Por outro lado, os ângulos $\angle ANM$ e $\angle ADB$ também têm a mesma medida, pois são ângulos correspondentes. Como $\angle MAN = \angle BAD$, concluímos que os triângulos AMN e ABD são semelhantes. Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{2}{5} \implies \frac{\overline{AN}}{\overline{AN} + \overline{NC} + \overline{CD}} = \frac{2}{5} \\ \implies \frac{5}{2} &= \frac{\overline{AN} + \overline{NC} + \overline{CD}}{\overline{AN}} \\ \implies \frac{5}{2} &= \frac{\overline{AN}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AN}} \\ \stackrel{??}{\implies} \frac{5}{2} &= 1 + \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} + \frac{\frac{4}{5} \cdot \overline{NC}}{\overline{AN}} \\ \implies \frac{5}{2} - 1 &= \left(1 + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} \\ \implies \frac{3}{2} &= \frac{9}{5} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} \\ \implies \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{9} \\ \implies \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} &= \frac{5}{6} \\ \implies \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

□

Com as notações do exemplo ??, temos que

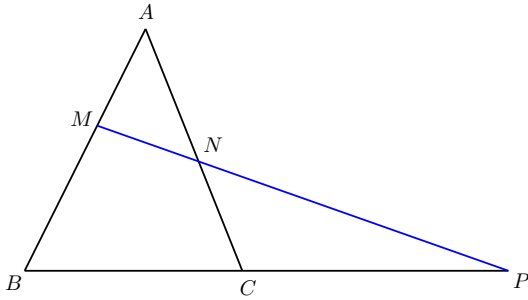
$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{18}{18} = 1. \end{aligned}$$

Conforme veremos, o fato de o produto de razões do primeiro membro acima ser igual a 1 é a chave para a colinearidade dos pontos M , N e P . Nesse sentido, apresentamos o resultado abaixo, devido a Menelaus de Alexandria, matemático grego que viveu entre os séculos I e II da era cristã.

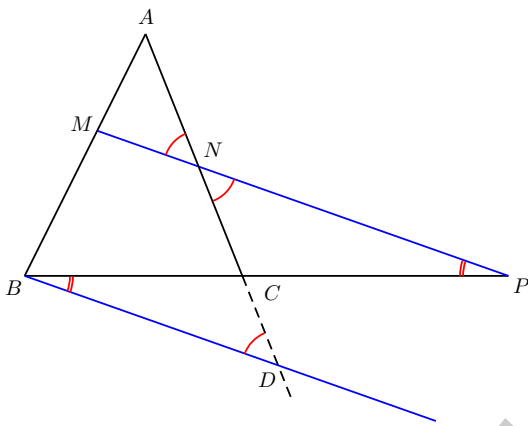
Teorema 2 (Menelaus). *Sejam ABC um triângulo e M , N e P pontos sobre as retas suportes dos lados AB , AC e BC , respectivamente, mas não todos situados sobre os lados de ABC . Então, M , N e P são colineares se, e somente se,*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1.$$

Prova. Inicialmente, vamos supor que os pontos M , N e P são colineares, com M e N situados sobre os lados AB e AC , respectivamente, e P situado sobre o prolongamento do lado BC (veja a figura a seguir).



Repetindo o raciocínio utilizado na solução do exemplo ?? (acompanhe na próxima figura), traçamos a paralela a \overleftrightarrow{MN} por B , marcamos seu ponto D de interseção com \overleftrightarrow{AC} e concluímos que $PNC \sim BDC$ e $AMN \sim ABD$.



A semelhança $PNC \sim BDC$ implica $\frac{CD}{CN} = \frac{BC}{CP}$. Mas,

$$\begin{aligned} \frac{CD}{CN} = \frac{BC}{CP} &\Rightarrow \frac{DN - CN}{CN} = \frac{BP - CP}{CP} \\ &\Rightarrow \frac{DN}{CN} - \frac{CN}{CN} = \frac{BP}{CP} - \frac{CP}{CP} \\ &\Rightarrow \frac{DN}{CN} - 1 = \frac{BP}{CP} - 1 \quad (2) \\ &\Rightarrow \frac{DN}{CN} = \frac{BP}{CP} \\ &\Rightarrow DN = \frac{BP}{CP} \cdot CN. \end{aligned}$$

Por outro lado, de $AMN \sim ABD$, obtemos $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$. Então, de forma análoga aos cálculos acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN} &\Rightarrow \frac{AM + BM}{AM} = \frac{AN + DN}{AN} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{BM}{AM} = 1 + \frac{DN}{AN} \quad (3) \\ &\Rightarrow DN = \frac{BM}{AM} \cdot AN. \end{aligned}$$

Agora, igualando as expressões encontradas para \overline{DN}

nas equações (??) e (??), obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \overline{CN} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \overline{AN}$$

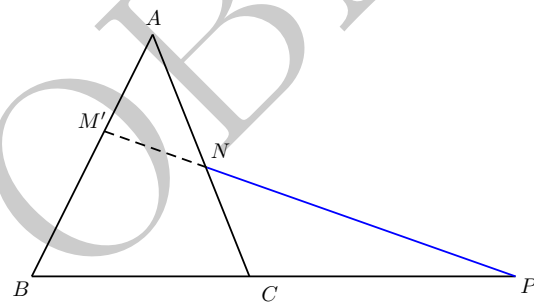
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1.$$

Reciprocamente, sejam M e N pontos situados sobre os lados AB e AC , respectivamente, e P um ponto situado sobre o prolongamento do lado BC , e suponha que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1. \quad (4)$$

Seja M' o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{NP} e \overleftrightarrow{AB} (veja a figura abaixo). Pela parte que já foi provada, temos



$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1. \quad (5)$$

Comparando as relações (??) e (??), concluímos que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}}.$$

Por sua vez, isso é o mesmo que

$$\frac{\overline{AB} - \overline{BM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB} - \overline{BM'}}{\overline{BM'}}$$

ou, ainda,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} - 1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM'}} - 1.$$

Então, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM'}}$, logo, $\overline{BM} = \overline{BM'}$. Mas, como M e M' estão situados sobre o lado AB , isso acarreta que $M = M'$. Portanto, $M = M'$, N e P são colineares. \square

A partir de agora, apresentaremos algumas aplicações do teorema de Menelaus.

Exemplo 3. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se D é o pé da bissetriz externa relativa ao vértice A e E e F são os pés das bissetrizes internas relativas aos vértices B e C , respectivamente, prove que os pontos D , E e F são colineares.

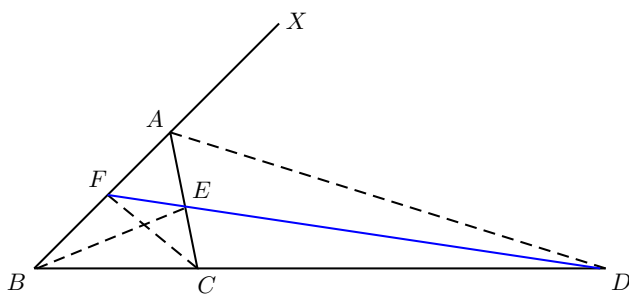
Prova. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} > \overline{AC}$ (acompanhe na figura a seguir). Pelo teorema do ângulo externo, temos

$$C\hat{A}X = A\hat{B}C + A\hat{C}B = \hat{B} + \hat{C},$$

logo,

$$\begin{aligned} C\hat{A}D + A\hat{C}D &= \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) + (180^\circ - \hat{C}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{B}) \\ &< 180^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto D está realmente situado à direita do vértice C , como na figura.



Agora, utilizando o teorema das bissetrizes (externas e internas), obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}},$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

e

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Substituindo tais relações no produto $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$, obtemos

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus, concluímos que os pontos D , E e F são colineares. \square

Exemplo 4. Sejam ABC um triângulo e D e E pontos sobre os lados BC e AB , respectivamente, tais que $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}$ e $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$. Denotemos por F o ponto de interseção das cevianas AD e CE . Calcule o valor da soma

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}.$$

Solução. Iniciamos observando que

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AE} + 3\overline{AE} = 4\overline{AE},$$

ou seja,

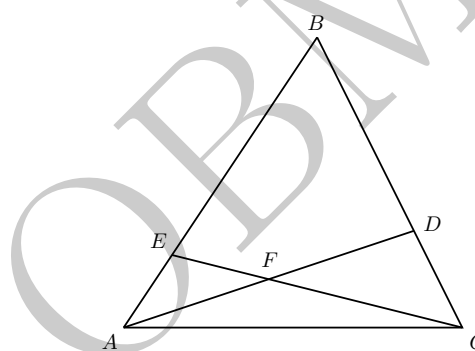
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 4;$$

também,

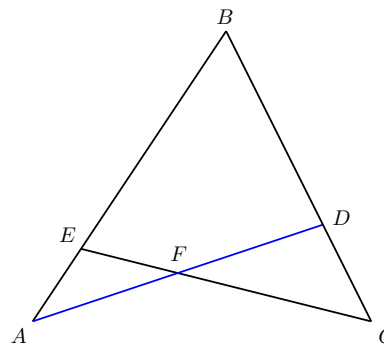
$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2\overline{CD} + \overline{CD} = 3\overline{CD},$$

logo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = 3.$$



Agora, aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo CBE (considerando a colinearidade dos pontos A , F e D), obtemos



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1$$

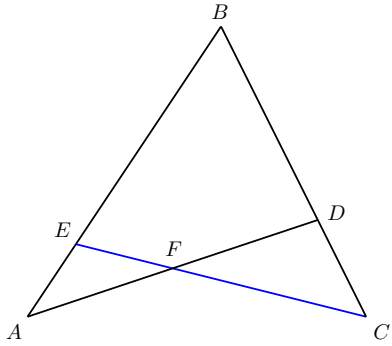
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1.$$

Então,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2}.$$

De modo inteiramente análogo, também podemos aplicar o teorema de Menelaus ao triângulo ABD (considerando os pontos colineares C , F e E).



Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FA}} = 1,$$

o que acarreta

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FA}} = 1,$$

logo,

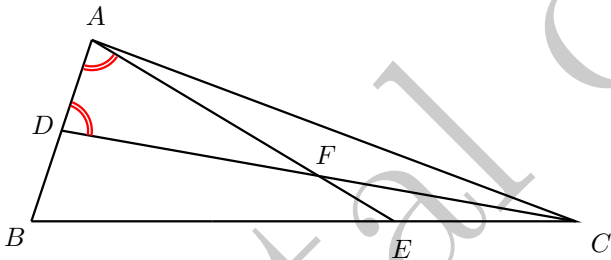
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

□

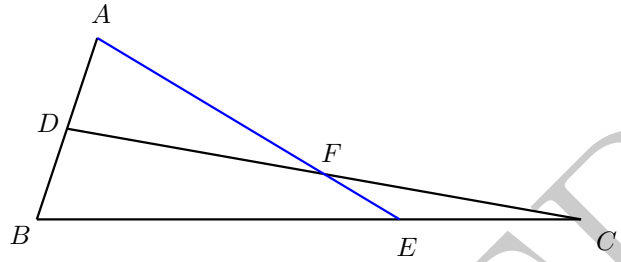
Exemplo 5. Na figura abaixo, $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{BE} = 2\overline{CE}$ e $F\hat{D}A = F\hat{A}D$. Calcule $B\hat{A}C$.



Solução. Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCD (observando a colinearidade dos pontos E, F e A) e utilizando as hipóteses dadas no enunciado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = 1 &\Rightarrow \frac{\overline{AD} + \overline{BD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{2\overline{CE}} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{2\overline{AD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{2\overline{CE}} = 1 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = 1. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\overline{DF} = \overline{FC}$.



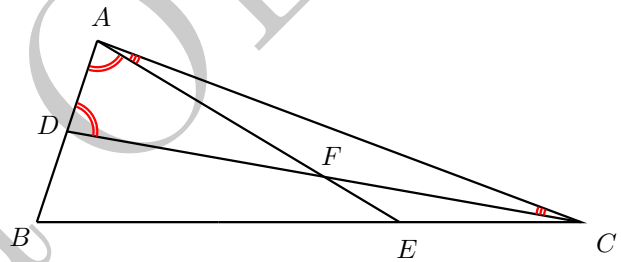
Por outro lado, como $F\hat{D}A = F\hat{A}D$, temos que ADF é isósceles de base AD , logo, $\overline{AF} = \overline{DF}$. Então,

$$\overline{AF} = \overline{DF} = \overline{FC},$$

logo, o triângulo ACF é isósceles de base AC .

Fazendo $F\hat{D}A = F\hat{A}D = \alpha$ e $F\hat{C}A = F\hat{A}C = \beta$ (acompanhe na figura a seguir), temos por um lado que

$$B\hat{A}C = F\hat{A}D + F\hat{A}C = \alpha + \beta.$$



Por outro lado, a soma dos ângulos internos do triângulo ACD (que vale 180°) é igual a

$$\begin{aligned} C\hat{D}A + D\hat{A}C + A\hat{C}D &= \alpha + (\alpha + \beta) + \beta \\ &= 2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Então, $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, de sorte que

$$B\hat{A}C = \alpha + \beta = 90^\circ.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de apresentarem a demonstração do teorema de Menelaus, ressaltem a ideia utilizada na solução do exemplo ??, pois ela é repetida na demonstração do teorema. Por sua vez, é importante que a demonstração do teorema seja apresentada com todos os detalhes, para que não restem dúvidas e para enfatizar o caráter lógico-dedutivo da Matemática. Também recomendamos que, ao apresentarem os demais exemplos, os

professores chamem a atenção dos alunos para os momentos em o teorema de Menelaus é utilizado, pois isso faz com que os alunos percebam a importância desse resultado.

Finalmente, recomendamos que os professores façam uma breve revisão sobre os teoremas do ângulo externo e das bissetrizes, pois eles são utilizados na solução do exemplo ??.

As referências listadas a seguir trazem outros exemplos e aplicações dos resultados apresentados neste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
2. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.
3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.